ELEMENTI

DELLA

SCIENZA DEL CALCOLO

PRIMA PARTE

ELEMENTI

DELLA

SCIENZA DEL CALCOLO

ESPOSTI

DAL PROFESSORE M. ZANNOTTI

PRIMA PARTE

ELEMENTI DI ARITMETICA

NAPOLI

Tipografia Niccola Vanspandoch e C.

Strada Sannicandro nⁱ 11, 12 e 13

1840

ALLA MEMORIA GLORIOSA

DI

FILIPPO M.A GUIDI

PER SCIENZA SOMMO E PER COSTUMI CARISSIMO

SOCIO ORDINARIO DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL'ACCADEMIA D'INCORAGGIAMENTO E DELLA PONTANIANA

EGREGIO PROFESSORE DI MATEMATICA

NELLA

REGIA UNIVERSITA' DEGLI STUDÎ DI NAPOLI

SOCIO CORRISPONDENTE DELLE ACCADEMIE

DI CATANIA TORINO LIONE NIMES EC. EC.

QUESTI ELEMENTI DELLA SCIENZA DEL CALCOLO

IN ARGOMENTO DI TENERA GRATITUDINE

VERSO IL MAESTRO DUCE E CONFORTATORE

DE' SUOI STUDÎ

L' AUTORE

DEVOTAMENTE CONSACRA

PREFAZIONE

L'opera, che pubblico, è il risultato dell'esperienza di dodici anni d' insegnamento. In questa non breve durata di tempo ho meditato continuamente il difficile problema di presentare alla gioventù la scienza, che professo, in modo da congiungere il rigore logico alla massima semplicità. Giudicando buoni i risultati delle mie ricerche, riconosco la possibilità di essermi ingannato : ma posso assicurare che fu buona l' intenzione.

Ho definito il calcolo numerico non esser altro che una misura indiretta delle grandezze. Questa definizione è giustificata dal fatto di tutte le operazioni aritmetiche: possiamo ottenere la somma di due numeri, aggiungendo all' uno successivamente le unità dell'altro ; il prodotto di due fattori, facendo un' addizione in cui il moltiplicando sia scritto tante volte, quante unità contiene il moltiplicatore ; ec. Ecco una misura diretta di una somma e di un prodotto. Ora le regole dell' addizione e della moltiplicazione, dispensandoci da questa misura diretta ci conducono ad ottenere gli stessi risultati, che allora diciamo di averli *calcolati*. Questo principio, in cui si compendia tutto il sapere matematico, è della massima importanza : se ne può vedere la discussione nell' opera — *Cours de Philosophie positive, par M. Auguste Comte. Paris 1830.*

Tutte le operazioni in cui trattasi di scomporre i numeri, vale a dire la sottrazione, la divisione, l' estrazione delle radici, le ho dedotte immediatamente dai metodi con i quali i numeri si compongono nell' addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenze. Per colui che non vede altro fuorchè l' esattezza del risultato, è indifferente il dire : *da* 7 *paga* 4 *resta* 3 ; ovvero 7 *essendo la somma e* 4 *una parte*, *l' altra sarà* 3. Ma bisogna distinguere l'arte del computista dalla scienza dell'arit-

metico : quella assicura l'esattezza dell'operazione, questa indaga l' evidenza del metodo col rigoroso procedere dal noto all'ignoto.

Ho costantemente taciuto l' enunciato della regola secondo la quale l'operazione viene eseguita. L'esperienza mi ha insegnato che queste formole generali sono utili, quando il pensiero le deduce da un abituale raziocinio su i problemi speciali. Comunicate anticipatamente, si trasformano ben presto in metodi empirici, la ragione è invitata al riposo, e la scienza non è più.

In tutti i trattati di aritmetica si ragiona delle *pruove* delle operazioni; in questo non sono neppure nominate. Se non m' inganno, la parola *pruova* esprime l'idea di un mezzo per lo quale lo spirito umano si convince che una cosa sia realmente, quale ha opinato dover essere. È una pruova pel chimico che due corpi aeriformi sieno l' uno ossigeno e l' altro idrogeno, se mescolati nelle dovute proporzioni e poi sottoposti all' azione di una scintilla elettrica, si trasformano in acqua; poichè l' idrogeno e l' ossigeno producono costantemente questo fenomeno, ed essi soli tra i corpi conosciuti sono suscettibili di produrlo. Ciò posto, come si pruova l' esattezza di un prodotto? — Per mezzo della divisione — Dunque ho potuto errare nella moltiplicazione, ma sono infallibile nella divisione. Adagio però: la divisione è provata dalla moltiplicazione; dunque la scena è mutata, e l' infallibilità ora trovasi nella divisione. Se l' assurdo di queste legittime illazioni è evidente, io sfido, percorrendo la storia delle aberrazioni dello spirito umano, sventuratamente un po' lunga, a trovarne una che pareggi la teorica delle pruove aritmetiche.

Dei numeri complessi non ho fatto una teorica distinta, perchè essi nè per la natura delle operazioni nè pei metodi di eseguirle si distinguono dai numeri interi e frazionarî. Essi non sono che un' applicazione delle regole del calcolo al sistema dei pesi e misure. Similmente ho esposto la dottrina delle ragioni e proporzioni separata dalle sue applicazioni ai problemi d'interesse, di società, ec.

ELEMENTI DI ARITMETICA

NUMERI INTERI

Nozioni preliminari.

1. Dicesi *grandezza* o *quantità* tutto ciò ch' è suscettibile di aumento o diminuzione : tali sono le lunghezze , le superficie, i volumi , le forze , il tempo , ec.

2. *Misurare* una grandezza è paragonarla ad un'altra della medesima specie , già definita dalla natura delle cose , o per semplice convenzione : questa grandezza scelta per termine di paragone , dicesi *unità*. Così la canna , il miglio , ec. sono unità convenzionali di lunghezza ; il giorno , l' anno sono unità naturali del tempo.

3. Il rapporto che misurando troviamo tra una grandezza e la sua unità , dicesi *numero ;* il quale può essere *intero* o *frazionario* , secondochè esprime una o più unità , ovvero una o più parti dell' unità : così *cinque* ducati , *una* canna sono numeri interi ; *un mezzo* ducato, *tre quarti* di canna sono numeri frazionarî.

4. I numeri , siano interi o frazionarî , si distinguono in *concreti* ed *astratti*. Si dice *concreto* un numero , quando si riferisce ad unità definita ; tali sono , per esempio , *sette* palmi , *cinque* ore ; ma se rapportiamo i numeri *sette* e *cinque* ad unità qualunque , allora prendono il nome di *astratti*.

5. La misura delle grandezze può essere *diretta* o *indiretta:* per esempio , sarà misurata direttamente la lunghezza di un mu-

ro, osservando quante volte vi è contenuto il palmo; la capacità di un vase, numerando le caraffe di acqua che bisognano ad empirlo, ec.; ed in generale sarà diretta la misura di una grandezza, quando ne determiniamo il valore, paragonandola immediatamente alla sua unità. Ma l'astronomo che vuol misurare la distanza che separa la Terra dal Sole, il fisico che vuol paragonare le quantità di calorico nei diversi corpi, non possono adoperare la misura diretta; è d'uopo che essi cerchino questi valori mediante le relazioni che la scienza ha scoverte tra le grandezze ch'essi vogliono valutare, e talune altre suscettibili di una misura diretta. Ora l'insieme delle operazioni da farsi sopra i numeri rappresentanti i valori di talune grandezze per dedurne i valori di altre dipendenti dalle prime, è ciò che dicesi *calcolo numerico*, le cui leggi costituiscono l'oggetto dell'*aritmetica*.

Numerazione.

6. Un sistema di nomi per esprimere i numeri e di cifre per disegnarli è ciò che viene dinotato dal vocabolo *numerazione*, la quale è primo fondamento delle leggi del calcolo.

7. Il sistema dei nomi, ossia la *numerazione parlata* ha per oggetto di poter nominare tutti i numeri, per quanto richiedono il commercio e le scienze, componendone i vocaboli con piccola quantità di voci radicali. A tal fine, dopo aver dato un nome distinto alle prime dieci unità successivamente addizionate, *uno*, *due*, *tre*, ... *dieci*, della somma di esse si è fatta un'unità del 2.° ordine detta *decina*; e si è detto *una*, *due*, *tre*, ... *nove decine*, come si era detto *una, due*, ... *nove unità*. Dall'unione di dieci decine si è composta un'unità del 3.° ordine denominata *cento*, al quale vocabolo si sono fatti precedere i nomi *uno*, *due*, ... *nove*, non altrimenti che per le decine. Progredendo con lo stesso metodo si è dato il nome *mille* a dieci centinaja; quindi i nomi *dieci-mila*, *cento-mila*, *milione* ec. per nominare le unità dell'ordine 4°. 5°. ec.

I numeri compresi tra una decina e l'altra vengono nominati dal nome della decina, seguito da quello delle unità aggiunte, così *venti-cinque*, *trenta-sette*, ec. Similmente pei numeri compresi tra un centinajo e l'altro, tra l'uno e l'altro migliajo, ec. se ne hanno i nomi, pronunziando successivamente quelli dei diversi ordini di unità che li compongono, incominciando dall'ordine superiore; così *cento-quaranta-due*, *mille-settecento-novanta-sette*.

8. Da tutto quel che si è detto rilevasi, il principio fondamentale del sistema di numerazione esser quello di dividere la serie naturale dei numeri in tante unità di diverso ordine, tutte collegate dalla legge di essere l'una dieci volte minore dell'altra; lo che brevemente esprimesi dicendo, *il sistema di numerazione ha per base dieci.*

9. Dieci segni, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, dei quali i primi nove diconsi *cifre significative* e l'ultima *cifra ausiliaria*, ossia *zero*, compongono gli elementi della *numerazione scritta.* Essi valgono a rappresentare qualsivoglia numero intero mediante il semplice principio di dare alle cifre due valori, l'uno *proprio* che serve ad esprimere la quantità delle unità, l'altro *di sito* che ne disegna l'ordine. La legge del valore di sito è che ogni cifra scritta alla sinistra di un'altra indica unità di un valore decuplo; quindi il numero *settemila-novecento-trenta-sei* sarà rappresentato dal sistema di cifre 7936.

Se tra i diversi ordini di unità componenti un dato numero, mancasse uno o più degli ordini subordinati, il posto ne sarebbe occupato da altrettanti zeri, per conservare alle cifre il rispettivo valore di sito; così i numeri *cinque-mila* e *quattro*, *tre-mila* e *settecento* saranno scritti 5004, 3700.

10. È una conseguenza immediata del sistema di numerazione scritta, che un numero diverrà 10, 100, 1000, ... volte maggiore, aggiungendo 1, 2, 3, ... zeri alla sua destra, perchè così operando ciascuna delle sue cifre esprimerà un valore 10, 100, 1000, ... volte più grande: e viceversa un numero terminato da zeri alla destra, diverrà 10, 100, 1000, ... volte minore, togliendone 1, 2, 3, ... zeri.

11. Siccome la numerazione parlata ha diviso i numeri in centinaja decine ed unità del 1°. ordine, centinaja decine ed unità di migliaja, centinaja decine ed unità di milioni, ec.; così per agevolare la lettura di un numero scritto, se ne dividono le cifre in ternarî, incominciando dalla destra. Nel primo di essi sono le centinaja decine ed unità del 1°. ordine, nel secondo le centinaja decine ed unità di migliaja, ec. come qui appresso vedesi notato.

34 857 963.

Addizione.

12. L'oggetto di quest'operazione di calcolo è quello di aggiungere più numeri insieme, per farne un solo che dicesi *somma*.

13. I numeri concreti, per essere suscettibili di addizione, debbono rappresentare grandezze omogenee misurate dalla stessa unità; senza la quale condizione il problema sarebbe assurdo, perchè inconciliabile con l'idea di numero.

14. Volendosi semplicemente indicare l'addizione di più numeri dati, si scriverà tra essi il segno + che si pronunzia *più*: così 7+5+9+4 vuol dire che si cerca la somma dei numeri 7, 5, 9, 4.

15. Se i numeri sono rappresentati da una sola cifra, ne troveremo la somma aggiungendo al primo le unità del secondo, a questa somma parziale le unità del terzo e così successivamente. Una tale composizione ci è facile per una lunga abitudine coetanea al primo sviluppo della nostra ragione; e quest' abitudine è la base del metodo con cui si ottengono le somme dei numeri di più cifre. In fatti sia

$$3794+587+73+925$$

l'addizione da eseguirsi. Osservando che i numeri dati possono decomporsi nel seguente modo

$$\begin{aligned} 3794 &= 3000+700+90+4 \\ 587 &= 500+80+7 \\ 73 &= 70+3 \\ 925 &= 900+20+5; \end{aligned}$$

addizionare la colonna a sinistra del segno = (che vuol dire *eguale*), sarà la stessa cosa che addizionare le altre situate a destra. Ora queste ultime ci presentano numeri di una sola cifra significativa, la di cui addizione ci è familiare; e per renderla metodica incominceremo dall'addizionare le unità del 1°. ordine, poi le decine, indi le centinaja, ec., progredendo sempre dalle unità di un ordine inferiore a quelle dell'ordine immediatamente superiore, affinchè se una o più unità di quest'ultimo si avessero dalla somma delle prime, si potessero immediatamente aggiungere all'ordine corrispondente.

A rendere più agevole tale operazione, si è pensato disporre

i numeri in colonne verticali in modo che le unità dell'istess' ordine si corrispondessero nella stessa linea; così incominciando dall'addizionare le cifre della prima colonna a destra e progredendo successivamente alla sinistra, sarà soddisfatta la condizione sopra esposta. Sotto l' ultimo numero scritto si condurrà una linea orizzontale per distinguere i numeri addizionati dalla loro somma.

Esempi.

45 734	956
9 652	3 843
29	654
756	29 832
8 428	7 568
64 599	42 853

Sottrazione.

16. Scopo di quest'operazione di calcolo è la soluzione del seguente problema: *data la somma di due numeri ed uno di essi, determinare l' altro*. Il numero che si cerca, dicesi *eccesso*, *residuo*, o *differenza*.

17. Il segno —, che si pronunzia *meno*, situato tra la somma a sinistra e la parte nota a destra, serve ad indicare la sottrazione: così 9—4 vuol dire che da 9 si deve sottrarre 4.

18. Quante volte l'operazione riguarda numeri di una cifra, l' abitudine di addizionare rende facilissima la determinazione del residuo, perchè presenta immediatamente al pensiero il numero che aggiunto alla parte nota, riproduce la somma data: così, per esempio, viene determinato il numero 5 nella sottrazione 8—3. Da questo semplicissimo dato deriva il metodo per ottenere il residuo dei numeri di più cifre. In fatti sia 6895 la somma

data e 5463 la parte nota: scriviamo il secondo numero sotto al primo, come qui a lato si vede. Le unità, decine, centinaja, e migliaja del numero maggiore sono le somme parziali delle unità, decine, ec. del numero mino-

6895
5463
1432

re rispettivamente aggiunte alle unità, decine, ec. del residuo; quindi sottraendo 3 da 5, 6 da 9, ec. determineremo il residuo 1432.

Cerchiamo ancora il residuo di 70042—35815. Ragionando come nel problema precedente, troviamo che le 2 unità non possono considerarsi come somma delle 5 unità date, più quelle del residuo; quindi la somma sarà stata 12 (a), di cui 5 essendo una parte, l'altra è 7. Le 4 decine sono la somma della 1 decina data, di quella del residuo, e della decina portata dalla somma precedente; quest'ultima decina essendo stata già tolta, la somma è restata 3, di cui 1 essendo la parte nota, l'incognita è 2. Al posto delle centinaja troviamo zero, indizio che la somma è stata 10, da cui sottraendo 8, abbiamo le 2 centinaja del residuo. Lo zero nel luogo delle migliaja indica ancora che la somma è stata 10, la quale è risultata dalle 5 migliaja note, da quelle che si cercano, e dal migliajo della somma precedente; dunque senza di quest'ultimo, la somma sarebbe stata 9, di cui 5 essendo una parte, l'altra è 4. Similmente otterremo le 3 decine di migliaja nel residuo.

$$\begin{array}{r} 70042 \\ 35815 \\ \hline 34227 \end{array}$$

19. Da quest'analisi si deduce che facendo dipendere la determinazione del residuo dal modo con cui due numeri si compongono nella loro somma, si ha un metodo che riunisce in un solo tutti i casi della sottrazione, e li risolve con eguale evidenza.

Moltiplicazione.

20. La *moltiplicazione* è un'addizione di numeri eguali: 4+4+4=12 è un caso di tale operazione. Il numero che viene più volte ripetuto, dicesi *moltiplicando; moltiplicatore* il numero delle volte ch'è preso il moltiplicando; e *prodotto* il risultato dell'operazione; così nell'esempio precedente 4 è il moltiplicando, 3 il moltiplicatore, e 12 il prodotto. Il moltiplicando ed il moltiplicatore vanno sotto il nome generico di *fattori.*

(a) Nell' addizione di due numeri, le unità di ordine superiore che risultano dalle somme parziali, non possono dare cifra maggiore di 1, perchè nella somma 9+9, che offre le cifre più grandi, 1 è la decina che ne deriva.

21. Il moltiplicando può essere un numero astratto o concreto, ed il prodotto sarà necessariamente della stessa natura, perchè fatto dalla ripetizione del moltiplicando; ma il moltiplicatore, disegnando *quantità di volte*, non può essere che un numero astratto.

22. La moltiplicazione viene indicata col mettere un punto, ovvero il segno X tra i due fattori; così 7.4, o pure 7X4, vuol dire 7 *moltiplicato* per 4.

23. Quando i numeri sono di una cifra, la quantità dei prodotti, che possono dare, combinandoli a due a due in tutti i modi possibibili, è definita; e siccome la cognizione di questi prodotti è indispensabile pel caso in cui i fattori hanno più cifre, così sono stati disposti nel seguente quadro che dicesi *tavola di moltiplicazione*, o *pitagorica*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Questa tavola nella prima linea orizzontale contiene i primi nove numeri; nella seconda ciascuno di essi moltiplicato per 2; per 3 nella terza, per 4 nella quarta, ec. Quindi per avere il prodotto di 6 per 7, bisognerà percorrere la linea orizzontale del 6 fino all' incontro della verticale del 7, e trovaremo 42 che sarà il numero richiesto. Tutti questi prodotti debbono sapersi a memoria.

24. Ora supponiamo dover moltiplicare 5793 per 4, cioè fare un' addizione in cui 5793 sia scritto 4 volte. Nell'eseguire quest' addizione si osserva che le 3 unità, le 9 decine, le 7 centinaja, e le 5 migliaja sono tutte ripetute 4 volte; dunque per otte-

```
5793  |
5793  |
5793  |  5793
5793  |     4
----  |  -----
23172 |  23172
```

nere il prodotto domandato, basterà determinare i prodotti parziali 3×4, 9×4, 7×4, 5×4, e scriverli l'uno dopo l'altro con la stessa regola con cui si scrivono le somme parziali nell'addizione; così avremo il prodotto 23172.

Sia ancora 4657 da moltiplicarsi per 794. Se moltiplicheremo 4657 per 4, poi per 90, e finalmente per 700, è evidente che la somma di questi tre prodotti rappresenterà il numero richiesto. Ora l'esempio precedente ci ha fatto noto il modo di ottenere il prodotto di 4657 per 4, che troviamo essere 18628. Riguardo a quello di 4657 per 90, è chiaro che avremo lo stesso risultato moltiplicandolo prima per 9 e

```
   4657
    794
 ------
  18628
 41913
32599
 ------
3697658
```

poi per dieci; sappiamo già moltiplicarlo per 9, e per rendere decuplo questo prodotto, faremo avanzare ciascuna delle sue cifre di un posto a sinistra nel situarlo sotto al prodotto precedente. Similmente avremo il prodotto di 4657 per 700, moltiplicando 4657 per 7, e scrivendo la sua prima cifra a destra in corrispondenza delle centinaja dei due primi prodotti. L'addizione dei tre prodotti ottenuti ci darà il prodotto totale 3 697 658.

25. Se tra le cifre del moltiplicatore vi fossero zeri, di questi non si terrà conto, purchè si badi a dare il posto conveniente alle cifre dei prodotti parziali, come si vede nell'esempio quì a lato esposto.

```
    6852
    4009
 -------
   61668
27408
 -------
27469668
```

Ma se gli zeri sono situati alla destra dei fattori, come 3700×50; allora si farà la moltiplicazione delle cifre significative, ed alla destra del loro prodotto si aggiungeranno gli zeri che si trovano nei due fattori. Ed in vero 3700 e 50 si possono riguardare come prodotti di 37 per 100, e di 5 per 10; in conseguenza molti-

```
  3700
    50
 ------
185000
```

plicando 37 per 5, si otterrà un prodotto 10 volte 100, ossia 1000 volte minore del vero; quindi per averlo esatto, bisognerà aggiungere alla sua destra tre zeri, vale a dire quanti ne hanno i due fattori.

26. Taluni problemi conducono a moltiplicazioni, in cui il numero dei fattori è maggiore di due, come per esempio $19 \times 13 \times 24$. In questo caso dopo aver fatta la moltiplicazione di 19 per 13, il prodotto 247, che ne risulta, diverrà un nuovo fat-

tore che sarà moltiplicato per 24: nello stesso modo verrà continuata l' operazione nell' ipotesi di un maggior numero di fattori.

27. Eseguendo la moltiplicazione di due o più fattori, si osserva costantemente che il prodotto non varia, qualunque sia il posto dei fattori: così i numeri 3, 5, 4, 7 daranno sempre il prodotto 420, comunque siano moltiplicati. Per coordinare questo fatto alla teoria, incominciamo dal caso di due fattori, e siano 4 e 3. Moltiplicando 4 per 3, avremo l' insieme rappresentato da A; e moltiplicando 3 per 4, avremo l' altro rappresentato da B, che contiene le stesse unità di A col solo cambiamento della direzione verticale in orizzontale, e viceversa: dunque necessariamente $4 \times 3 = 3 \times 4$.

$$A \quad \begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{matrix}$$

$$B \quad \begin{matrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix}$$

Ora supponiamo un numero qualunque di fattori, $3 \times 5 \times 7 \times 4$. Per la dimostrazione precedente il fattore 3 potrà occupare il 2° posto, ed avremo $3 \times 5 \times 7 \times 4 = 5 \times 3 \times 7 \times 4 = 15 \times 7 \times 4$. Facendo passare 15 al 2° posto, si avrà $15 \times 7 \times 4 = 7 \times 15 \times 4 = 7 \times 5 \times 3 \times 4 = 105 \times 4$. Mettiamo 105 al 2° posto, e sarà $105 \times 4 = 4 \times 105 = 4 \times 7 \times 5 \times 3$. Queste trasformazioni dimostrano che il fattore 3 ha potuto occupare successivamente tutte le posizioni senza alterare il valore del prodotto; e potendosi altrettanto eseguire su ciascuno degli altri fattori, è chiaro che *il valore del prodotto è indipendente dal posto dei fattori.*

Divisione.

28. Quest'operazione determina uno dei fattori di un prodotto, quando l'altro sia noto. E siccome la prima idea della divisione è stata quella di riguardarla come metodo di scomporre un numero in tante parti eguali, quante ne venivano indicate da un altro numero dato; così il prodotto da scomporsi si è nominato *dividendo*, il fattore dato *divisore*, e *quoziente* il fattore incognito, dal latino *quoties* perchè disegna quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

29. La divisione viene indicata con due punti situati tra il dividendo ed il divisore, ovvero con una lineetta orizzontale, sopra la quale è scritto il dividendo e sotto il divisore; così 12 : 3, o $\frac{12}{3}$ vuol dire 12 *diviso per* 3.

30. Se il divisore avendo una cifra, il dividendo ne abbia una, o due tali che la prima a sinistra sia minore di quella del divisore; il quoziente in questo caso sarà di una cifra, e la tavola di moltiplicazione basterà a determinarla. Sia, per esempio, 56 da dividere per 8: si percorra la linea verticale del 8, ed alla 7.ª orizzontale trovando 56, è chiaro che 7 è il fattore richiesto. Ma se il dividendo fosse 54, allora percorrendo la linea dei moltiplici di 8, si vedrebbe che 54 è compreso tra i due prodotti 48 e 56; e che per conseguenza bisogna considerarlo composto di due parti, l'una divisibile per 8 e che darà 6 per quoziente, e l'altra sarà un residuo, di cui la teorica delle frazioni insegnerà l'uso.

31. Supponiamo ora 30843 il dividendo e 9 il divisore. Il 30843 è stato composto moltiplicando le unità, decine, centinaja, ec. del quoziente per 9; e dei successivi prodotti parziali si sono scritte le cifre 3, 4, 8, ec., riportando sempre le ritenute ai prodotti seguenti. Se queste ritenute fossero note, allora potremmo decomporre prima il prodotto delle unità, poi quello delle decine, ec; ma esse sono ignote, quindi l'operazione non può cominciarsi dalla destra. Alla sinistra poi del dividendo deve trovarsi il prodotto di 9 per le più alte unità del quoziente; e questo prodotto sarà contenuto nel 30, perchè 9 moltiplicato per altro numero intero non poteva dare 3. Ora il 30 contiene, oltre le migliaja del quoziente moltiplicate per 9, la ritenuta del prodotto precedente, la quale dovendo essere minore di 9 (b), diverrà residuo della divisione di 30 per 9. Determinate così le 3 migliaja del quoziente, e sottraendo da 30 il prodotto $9 \times 3 = 27$, il residuo 3 sarà la ritenuta del prodotto delle centinaja per 9. Questo è dunque contenuto nel 38 che diviso per 9 determina le

30843	9
3260	3427

(b) Nella tavola pitagorica si osserva che quando il prodotto ha due cifre, la prima a sinistra è costantemente minore della cifra di ciascun fattore; e per averla eguale, bisognerebbe che l'altro fattore fosse 10.

4 centinaja del quoziente; e così progredendo avremo le 2 decine e le 7 unità.

32. Sia 59968 da dividersi per 7496. In questo caso il quoziente avrà una cifra; poichè 10 essendo il numero più piccolo di due cifre,

59968	7496
3740	8

il divisore moltiplicato per 10 dovrebbe dare un prodotto eguale al dividendo o minore di esso, nell' ipotesi che 10 fosse il quoziente; ma il prodotto che ne risulta è maggiore; dunque il quoziente è minore di 10, e quindi di una cifra. Per determinare questa cifra si osservi che il dividendo è stato composto moltiplicando le unità, decine, ec. del divisore per la cifra del quoziente; che dai prodotti parziali si sono ottenute successivamente le cifre 8, 6, 9. ec; e che l'ultimo di essi è stato 59, in cui vi è il prodotto delle 7 centinaja per la cifra del quoziente. Dividendo 59 per 7 si ha per quoziente 8, il quale s'è il numero richiesto, dovrà soddisfare a tutti gli altri prodotti parziali. Ora sottraendo 8×7 da 59, si ha 3 per residuo, che sarà la ritenuta del prodotto delle 4 centinaja per 8; questo prodotto si troverà dunque nelle 39 centinaja. Da questo sottratto 4×8, si ottiene il residuo 7; e quindi nelle 76 decine starà il prodotto delle 9 decine per 8. Similmente si sottragga 9×8 da 76, si avrà il residuo 4; e quindi l'ultimo prodotto sarà 48 in cui 6 è contenuto esattamente 8 volte. Se le ritenute dei prodotti parziali fossero state determinabili nell' ordine 4, 7, 3, la divisione avrebbe potuto aver principio dalla destra.

Nell' esempio precedente la cifra 8, determinata mediante la divisione di 59 per 7, si è trovata esatta per gli altri prodotti parziali; ma ciò non è costante. In fatti dividiamo 19313 per 2759: il quoziente sarà ancora di una cifra; e ragionando come nell'esempio precedente, divideremo 19 per 2, ed avremo 9 per

19313	2759
5460	7

quoziente ed 1 per residuo. Se 9 fosse l'esatto quoziente, le 7 centinaja del divisore moltiplicate per 9 dovrebbero dare un numero suscettibile di essere sottratto dalle 13 centinaja del dividendo, lo che non avendo luogo, è chiaro che 9 è troppo grande. Supponiamolo dunque eguale ad 8, che moltiplicato per 2 e sottratto da 19, dà per residuo 3; ma poi 8×7 non si può sottrarre dalle 33 centinaja del dividendo; dunque il quoziente è minore di 8. Finalmente facendolo eguale a 7, si trova questa cifra soddisfacente a tutte le condizioni.

La ragione di questa differenza di risultati è una conse-

guenza della legge di moltiplicazione. Ed in vero dovendo la ritenuta d'ogni prodotto parziale essere rappresentata da una cifra minore di quella di ciascuno dei fattori, la ritenuta di 8×4, nel primo esempio, sarà minore di 4, e tanto più lo sarà della cifra 7 delle migliaja; in conseguenza non potrà aumentare il prodotto 8×7, in modo che il 7 sia contenuto una volta di più nel 59: ma nel secondo esempio la ritenuta di 7×7 dall'essere minore di 7, non ne segue che sia minore della seguente cifra 2; che anzi la supera del doppio, essendo 4 la ritenuta, e perciò il 2 trovasi contenuto 9 volte nel 19, in vece di 7 ch'è il vero quoziente.

I residui 3, 7, 4 del primo esempio di questo n.°, come ancora quelli del secondo esempio, sono rappresentati ciascuno da una cifra minore di quella del quoziente: risultato necessario per essere i residui ritenute delle moltiplicazioni parziali. Ma se il dividendo tenesse aggiunto ad un moltiplice esatto del divisore altro numero, che la divisione presenterebbe sotto forma di resto, allora la legge dei residui sarebbe alterata, e ne troveremmo qualcuno più grande o almeno eguale alla cifra del quoziente; donde è chiaro che avendosi un residuo di tal natura, sarà inutile continuare l'esperimento della cifra ottenuta dalla prima divisione parziale, avendosi di già un carattere sicuro della sua esattezza: così nella divisione di 8075243 per 956371, dividendo 80 per 9 si ottiene il quoziente 8, ed il residuo è eguale alla cifra 8 che si dovrebbe mettere a pruova;

```
8075243 | 956371
7650968 | ------
-------     8
 424275
```

dunque 8 è il quoziente richiesto, e la divisione darà un residuo, come il fatto conferma.

33. Per completare l'esame di tutti i casi che può offrire la divisione, resta a considerare quello in cui divisore e quoziente hanno più cifre: sia, per esempio, 187384 da dividersi per 472. La principale quistione essendo quella di determinare la specie delle più alte unità del quoziente, si osservi che nella composizione del prodotto 187384 il 472 è stato successivamente moltiplicato per le unità, decine, centinaja, ec. del quoziente, e che 472 moltiplicato per migliaja non avrebbe potuto dare un prodotto inferiore a 472 migliaja. Ma le unità di quest'ordine nel dividendo sono 187;

```
187384 | 472
1416   | ---
-----    397
 4578
 4248
 ----
  3304
  3304
 -----
   ==
```

dunque il quoziente non può aver migliaja, e le sue più alte unità saranno le centinaja, che si conterranno per conseguenza nel numero 1873, il quale diviso per 472 darà le 3 centinaja del quoziente. Facendo il prodotto di 472 per le 3 centinaja e sottraendolo dal dividendo, il residuo conterrà il prodotto di 472 per le decine ed unità del quoziente. Ora il prodotto di 472 per le decine dovendo terminare in decine, si vede che la cifra 8 del dividendo ne fa parte; quindi il secondo dividendo parziale sarà 4578 che diviso per 472 dà per quoziente 9, ec. Da quest'analisi si rileva che divisore e quoziente avendo più cifre, bisognerà separarne tante alla sinistra del dividendo, quante bastino a contenere il divisore: così sarà determinata la prima divisione parziale, dopo la quale le altre non offriranno alcuna difficoltà.

È soltanto d'avvertirsi che se nel corso dell'operazione qualche dividendo parziale si trovasse non poter contenere il divisore, questo fatto indicarebbe che quella specie di unità manca nel quoziente, e per ciò sarà messo un zero per indicarne il posto. La divisione di 341924 per 836 offre un caso di tal natura.

341924	836
3344	——
————	409
7524	
7524	
————	
= =	

34. Se il dividendo ed il divisore fossero terminati da zeri, se ne potrà togliere un egual numero all'uno ed all'altro, senza che il quoziente venga alterato. Sia, per esempio, 12000 da dividersi per 400. Il 12000 è stato composto (n.° 25) moltiplicando 4 pel quoziente, ed aggiungendo due zeri alla destra del prodotto; togliamo ora questi due zeri, ed il quoziente sarà determinato dalla divisione di 120 per 4.

Numeri primi — Caratteri di divisibilità.

35. Un numero divisibile soltanto per se stesso e per l'unità, dicesi *numero primo;* tali sono 2, 3, 5, ec.

36. Per ottenere i fattori primi di un numero dato, bisognerà dividerlo successivamente per 2, 3, 5, ec. tutte le volte

che si può: così 360 diviso successivamente per 2, dà i quozienti 180, 90, 45; quest' ultimo, che non è divisibile per 2, lo è per 3, e dà i quozienti 15 e 5; e finalmente 5, divisibile solo per se stesso, dà per quoziente 1, che indica il termine dell'operazione. Se la divisione per uno dei numeri primi della serie naturale non riuscisse esatta, allora il divisore in quistione mancarebbe nel numero dato; così cercando i divisori primi di 385, si vedrà che 2 e 3 non possono esservi annoverati.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

385	5
77	7
11	11
1	

37. Essendo il dividendo eguale al prodotto del divisore pel quozieute, si ha

$$360=2.180=2.2.90=2.2.2.45=2.2.2.3.15=2.2.2.3.3.5.$$

Dall' ultima espressione si rileva che ogni numero può essere riguardato come il prodotto dei suoi fattori primi.

38. Il sistema dei fattori primi, da cui risulta un dato numero, è costante; dimodochè non si può supporre che il 360, per esempio, possa derivare da un sistema di fattori diversi da 2. 2. 2. 3. 3. 5; dapoichè essendo inalterabile il metodo, con cui si cercano i fattori primi di un numero dato, sarà benanche inalterabile il valore non solo, ma ancora il numero di volte che ciascuno di essi sarà moltiplicato per se stesso; in conseguenza per supporre in un medesimo numero due sistemi diversi di fattori primi, dovrebbe essere possibile ottenere diversi quozienti da uno stesso dividendo e divisore, lo che è assurdo.

39. Dividendo 360 per 24, si ha per quoziente 15. Ora 360=2.2.2.3.3.5, 24=2.2.2.3, e 15=3.5; dunque *la divisione consiste nel togliere dal dividendo i fattori del divisore*, i fattori restanti saranno quelli del quoziente: quindi un numero per essere divisibile per un altro è necessario che ne contenga tutti i fattori. Da questo teorema risultano diverse conseguenze.

1° Combinando in tutti i modi possibili i fattori primi di un numero, si otterrà il sistema completo de' suoi divisori. Così supponiamo di voler conoscere tutti i divisori di 360. Si scrivano i suoi fattori primi nel seguente modo

$$(1,2,2.2,2.2.2)(1,3,3.3)(1,5) .$$

ossia $$(1,2,4,8)(1,3,9)(1,5);$$

indi si moltiplichi ciascun numero del primo gruppo per ciascuno del secondo, ed i prodotti si moltiplichino per ogni numero del terzo gruppo; i numeri risultanti dall' ultima moltiplicazione saranno evidentemente i divisori richiesti. Eccoli qui appresso disposti in ordine di grandezza.

1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,18,20

24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360.

2° — a. Le decine, le centinaja, le migliaja, ec. contenendo tutte il fattore 2, saranno divisibili per 2, qualunque sia la cifra che le rappresenti; quindi un numero sarà divisibile per 2, se è terminato da una delle seguenti cifre, 0, 2, 4, 6, 8: così 3472, 548, 6870, ec. saranno divisibili per 2; al contrario 547, 381, 659, ec. divisi per 2, danno 1 per residuo.

— b. Le centinaja, le migliaja, ec. contengono tutte il fattore 4; in conseguenza un numero sarà divisibile per 4, se le decine e le unità formino un moltiplice di 4 Similmente si trova che un numero è divisibile per 8, quando lo siano le tre ultime cifre, ec.

— c. Dividendo per 3 la serie 1, 10, 100, 1000, ec., si avrà sempre 1 per residuo; quindi divise per 3 le migliaja, centinaja, decine, ed unità del numero 5826, la somma dei residui sarà rappresentata da 5+8+2+6, e se ques'a somma è divisibile per 3, lo sarà anche il numero proposto. Dunque un numero sarà divisibile per 3, se la somma delle sue cifre è moltiplice di 3 — Similmente ragionando si troverà che un numero è divisibile per 9, quando la somma delle sue cifre sia moltiplice di 9.

— d. Poichè le decine, centinaja, ec. contengono tutte il fattore 5, è chiaro che un numero sarà divisibile per 5, quando sia terminato da zero, o da 5. Così trovaremo ancora che un numero sarà divisibile per 25, 125, ec, quando le due, le tre, ec. ultime cifre formino un moltiplice di 25, 125, ec.

— e. Componendo insieme i caratteri di divisibilità pei numeri primi, si avranno quelli pei numeri composti: così un numero sarà divisibile per 12, se la somma delle sue cifre sia moltiplice di 3, e le due ultime siano divisibili per 4.

NUMERI FRAZIONARJ

Nozioni preliminari.

40. Il numero, che si ottiene misurando una grandezza minore dell'unità, dicesi *numero frazionario*, o semplicemente *frazione*. Per eseguire questa misura, s'immagina, l'unità divisa in più parti eguali, in modo che una o più di esse unite insieme siano eguali alla grandezza data. Da ciò si deduce che l'espressione di una frazione deve comporsi di due numeri, uno dei quali servirà a dinotare in quante parti l'unità è stata divisa, e dicesi *denominatore*, perchè da esso le parti prendono il loro nome; l'altro è il *numeratore*, perchè numera la quantità di parti necessaria ad eguagliare la grandezza data: così nelle espressioni *tre settimi*, *cinque ottavi*, *tre e cinque* sono numeratori, *sette* ed *otto* denominatori, perchè da essi derivano i nomi *settimi* ed *ottavi*, che si danno alle parti dell'unità.

41. I due termini di una frazione si scrivono separati da una linea orizzontale, sopra la quale si pone il numeratore, e sotto il denominatore; così $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ esprimono *due terzi*, *quattro noni*.

42. Nei sopraddetti esempî si osserva che i numeratori sono pronunziati come fossero numeri interi; e questo ha luogo in ogni frazione: riguardo poi ai denominatori, se sono rappresentati dai numeri 2, 3, 4, . . . 10, prendono i nomi *metà*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, *decimi;* per tutti gli altri numeri il nome del denominatore si forma mutando la terminazione de' loro nomi in *esimi*, così da *quarant-a si fa quarant-esimi*, da *cent-o cent-esimi*, ec.

Teoremi sulle frazioni.

43. 1. Una frazione equivale al quoziente di una divisione, in cui il numeratore sia *dividendo* ed il denominatore *divisore*. In fatti se 1 dovesse dividersi per 7, il quoziente sarebbe evidente-

mente $\frac{1}{7}$; 2 darebbe un quoziente doppio, e per ciò $\frac{2}{7}$; similmente il quoziente di 3 per 7, dovendo essere triplo, sarebbe $\frac{3}{7}$ ec. Questo ragionamento potendosi applicare a qualsiasi frazione, è una dimostrazione esatta del teorema enunciato, dal quale si deducono diverse conseguenze.

— 1.° Mediante una frazione si completerà il quoziente di una divisione, la quale avesse un residuo. Dividendo, per esempio, 17 per 5, si ha l'intero 3 al quoziente, ed il residuo 2, il quale diviso ancora per 5, darà $\frac{2}{5}$; in conseguenza l'esatto quoziente sarà $3+\frac{2}{5}$.

— 2.° Un'espressione frazionaria, in cui il numeratore è eguale al denominatore, rappresenta l'unità; così $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{11}{11}$, ec. sono $=1$, e per ciò eguali tra loro: quindi sotto forma frazionaria l'unità può ricevere infinite espressioni.

— 3.° Se il numeratore di un'espressione frazionaria ecceda il denominatore, vi sarà contenuto necessariamente un numero intero che la divisione farà conoscere; così

$$\frac{12}{3}=4,\ \frac{7}{2}=3+\frac{1}{2},\ \frac{38}{7}=5+\frac{3}{7}.$$

— 4.° Un intero può ridursi ad espressione frazionaria con un dato denominatore. Sia, per esempio, 8 da ridursi a forma di frazione col denominatore 5: sapendo che il numeratore deve rappresentare il dividendo, 5 il divisore, ed 8 il quoziente, avremo il numeratore eguale a $5.8=40$; in conseguenza $\frac{40}{5}$ sarà l'espressione richiesta —

II. Aumentando il numeratore di una frazione, il valore di essa diviene maggiore, perchè più parti si prendono dell'unità; così aggiungendo 2 al numeratore della frazione $\frac{3}{8}$, si ottiene $\frac{5}{8}$, valore più grande di $\frac{3}{8}$. Per la stessa ragione decresce il va-

lore di una frazione diminuendo il numeratore; così togliendo 2 dal numeratore della frazione $\frac{7}{9}$, si ha $\frac{5}{9}$ minore di $\frac{7}{9}$.

III. Aumentando il denominatore di una frazione, il suo valore diminuisce. Aggiungiamo 3, per esempio, al denominatore della frazione $\frac{5}{6}$; avremo $\frac{5}{9}$ minore di $\frac{5}{6}$, perchè le parti 9^e dell'unità sono più piccole delle parti 6^e, e prendendone lo stesso numero 5, avremo nella seconda frazione un valore minore della prima. — Similmente si dimostra che una frazione aumenta, quando il denominatore diminuisce.

Dall'osservare che una frazione aumenta coll'accrescere il numeratore e diminuisce coll'aumentare il denominatore, non si può dedurre che aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, questa conservi il suo valore, poichè le due alterazioni del valore non si sono dimostrate eguali. Dicasi altrettanto delle alterazioni prodotte per via di sottrazione (c).

IV. Moltiplicando o dividendo per un dato numero il numeratore di una frazione, il suo valore viene moltiplicato o diviso per lo stesso numero; così moltiplicando per 2 il numeratore della frazione $\frac{4}{11}$ si ha $\frac{8}{11}$ valore doppio di $\frac{4}{11}$, e dividendo per 2 si ottiene $\frac{2}{11}$ metà di $\frac{4}{11}$.

V. Se il denominatore di una frazione viene moltiplicato o

(c) Supponiamo che aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, il suo valore non si alteri. Sia $\frac{3}{5}$ la frazione; aggiungendo uno stesso numero m ai due termini, avremo $\frac{3}{5}=\frac{3+m}{5+m}$, dietro la supposizione fatta. Riducendole poi allo stesso denominatore, si avrà $\frac{15+3m}{25+5m}=\frac{15+5m}{25+5m}$; quindi $15+3m=15+5m$, ossia $3m=5m$, risultato assurdo. Dunque aumentando di una stessa quantità i due termini di una frazione, il valore resta alterato. Nello stesso modo si ragionerebbe nel caso di sottrazione dai due termini.

diviso per un dato numero, il valore della frazione sarà viceversa diviso o moltiplicato per lo stesso numero. Moltiplicando, per esempio, per 2 il denominatore della frazione $\frac{2}{6}$, avremo $\frac{2}{12}$ metà di $\frac{2}{6}$; poichè ciascuna delle parti 6e, per farle divenire 12e, si è dovuta dividere in 2, e quindi è divenuta metà di quel che era. Al contrario dividendo per 2 il denominatore si ha $\frac{2}{3}$ doppio di $\frac{2}{6}$; perchè le parti 6e si son dovute aggiungere a due a due, ossia renderle doppie, per farle divenire parti 3e.

VI. Moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, il suo valore non varia; poichè se questo diviene doppio, triplo, ec. per essersi moltiplicato per 2, 3, ec. il numeratore, diverrà nel tempo stesso metà, terzo, ec. per l'aggiunzione del fattore 2, 3, ec. al denominatore. Dicasi altrettanto nel caso che si dividano i due termini per uno stesso numero. Quindi

1°. Una frazione può ricevere infinite espressioni con aggiungere eguali fattori al numeratore ed al denominatore; così

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{18}{27} = \text{ec.}$$

2.° Una frazione non cangerà valore, se ai suoi termini aggiungiamo nell'istesso ordine quelli di una frazione eguale, così $\frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9} =$ ec.; poichè questo equivale a moltiplicarne i due termini per 2, 3, ec. Lo stesso avverrebbe, sottraendo termine a termine da una frazione la sua equivalente; così $\frac{6}{15} = \frac{6-2}{15-5} = \frac{4}{10}$. Dunque, perchè una frazione non si alteri di valore con l'aggiungere o sottrarre uno stesso numero ai suoi termini, è necessario che abbia il numeratore eguale al denominatore, ossia $= 1$.

3.° Dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, mentre il suo valore rimane costante, ne viene sempli-

*

ficata l'espressione; così $\frac{56}{72}=\frac{56:8}{72:8}=\frac{7}{9}$. Inoltre a misura che il divisore comune ai due termini è più grande, i quozienti saranno più piccoli e la frazione diverrà più semplice; quindi per ottenere la più semplice espressione di una data frazione, bisognerà cercare il numero più grande che sia divisore dei due termini di essa, donde gli viene il nome di *massimo divisore comune.*

Ricerca del massimo comune divisore.

44. Sia $\frac{2646}{9702}$ la frazione che si vuol ridurre all'espressione più semplice. Il numero che deve dividere i due termini di essa non può evidentemente superare il numeratore; supponiamolo dunque eguale a 2646. Se questo fosse il numero richiesto, dovrebbe essere esatto divisore del denominatore; ma eseguendo la divisione, abbiamo il quoziente 3, ed il residuo 1764. Ora per la teorica della divisioue si ha

$$9702=2646.3+1764;$$

in conseguenza ogni divisore di 9702 e 2646, lo sarà ancora di 1764, poichè dividendo 2646, dividerà ancora 2646×3 che è una parte di 9702, e dividendo l'intero numero 9702 ed una parte di esso, dividerà ancora l'altra, ossia 1764. Dunque 9702 e 2646, 2646 e 1764 avranno il medesimo sistema di divisori; in conseguenza il massimo divisore dei primi numeri, lo sarà benanche dei secondi: cerchiamolo dunque tra 2646 e 1764. Fatta la divisione si trova il quoziente 1 ed il residuo 882: donde

$$2646=1764\times1+882.$$

Ragionando come nel caso precedente si troverà che il massimo divisore di 2646 e 1764 è lo stesso che quello di 1764 e 882. Ora 882 è divisore esatto di 1764; quindi 882 sarà il numero richiesto. Dividendo poi i due termini della frazione proposta per 882, si hanno i quozienti 3 e 11; in conseguenza $\frac{2646}{9702}=\frac{3}{11}$.

Per la comodità del calcolo l'operazione si dispone come qui appresso.

$$9702 \left(\frac{2646}{3} \left(\frac{1764}{1} \left(\frac{882}{2} \right.\right.\right.$$

45. Scomponendo i due termini della frazione proposta ed il loro massimo divisore comune nei rispettivi fattori primi, si troverà $9702 = 2.3.3.7.7.11$, $2646 = 2.3.3.3.7.7$......... $882 = 2.3.3.7.7$. L'ultimo essendo composto di tutti i fattori comuni ai due termini della frazione data (d), questi divisi pel massimo comune divisore, daranno due quozienti primi tra loro, e la frazione da essi rappresentata, sarà necessariamente irreducibile a più semplice espressione. Donde segue che ogni frazione, la quale non tiene alcun fattore comune ai due termini, non può ricevere forma più semplice: tal'è la frazione $\frac{54}{245}$, di cui cercando il massimo divisore comune, si trova l'unità; lo che indica esser composta di termini primi tra loro.

$$245 \left(\frac{54}{4} \left(\frac{29}{1} \left(\frac{25}{1} \left(\frac{4}{6} \left(\frac{1}{4} \right.\right.\right.\right.\right.$$

46. Alcune volte si domanda il massimo divisore comune a 3,4, ec. numeri dati; e siano, per esempio, 924, 420, 273. Incominciando dal ricercarlo tra 924 e 420, si avrà 84; questo sarebbe il numero richiesto, se dividesse ancora 273; ma siccome la divisione non riesce esatta, così cercheremo il massimo divisore tra 273 e 84, e troveremo 21 che sarà il numero domandato, poichè dividendo 273 e 84, dividerà ancora 924 e 420, i quali contengono i fattori di 84. Eccone le due operazioni.

$$924 \left(\frac{420}{2} \left(\frac{84}{5} \right.\right. \quad , \quad 273 \left(\frac{84}{3} \left(\frac{21}{4}. \right.\right.$$

(d) Questo carattere del massimo comune divisore è una conseguenza del teorema esposto nel n.° 39.

Addizione.

47. Le frazioni, affinchè possano addizionarsi, debbono avere lo stesso denominatore; poichè dovendo la loro somma esprimere il rapporto che tutte insieme hanno con l'unità, è necessario che questa sia divisa in parti eguali per tutte le frazioni. Data questa condizione, ne avremo la somma addizionando i numeratori, come quelli che esprimono la quantità delle parti, e sottoscriveremo a questa somma il denominatore comune, per indicare il valore di ciascuna parte. Se il numeratore della somma eccedesse il denominatore, la divisione farà conoscere il numero intero contenuto nell'espressione frazionaria. Così

$$\frac{1}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}+\frac{5}{7}=\frac{16}{7}=2+\frac{2}{7};\ \frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}=2+\frac{3}{8}.$$

48. Se poi le frazioni avessero differenti denominatori, si cercherà ridurle ad un denominatore comune nel seguente modo. Siano $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}$ le frazioni date. È noto che una frazione non si altera di valore, quando i due termini sono moltiplicati per uno stesso numero; moltiplichiamo dunque i due termini di $\frac{2}{3}$ pel prodotto 8×7, quelli di $\frac{5}{8}$ per 3×7, quelli di $\frac{4}{7}$ per 3×8. Così le frazioni, conservando lo stesso valore, avranno un denominatore comune formato dal prodotto $3.8.7 = 168$. Dopo questa riduzione avremo invece delle frazioni proposte,

$$\frac{112}{168}+\frac{105}{168}+\frac{96}{168}=\frac{313}{168}=1+\frac{145}{168}.$$

Allorchè i denominatori delle frazioni proposte hanno fattori comuni, la riduzione allo stesso denominatore può farsi senza renderne complicata l'espressione. Siano

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{14}, \frac{7}{12}$$

le frazioni date. Decomposti i denominatori nei loro fattori primi, avremo $4=2.2$, $6=2.3$, $9=3.3$, $12=2.2.3$, $14=2.7$. Vi sono dunque i fattori comuni 2, 3, 7; facendone un prodotto in modo che ciascuno di essi sia fattore il maggior numero di volte che lo è nei denominatori dati, questo prodotto, ossia $2.2.3.3.7=252$, sarà (n. 39) divisibile per ognuno dei denominatori (e): quindi ciascuno di essi potrà divenire, per via di moltiplicazione, eguale a 252, ed i fattori di queste moltiplicazioni saranno $252:4$, $252:6$, $252:9$, ec. Moltiplicando i rispettivi numeratori per questi quozienti, avremo ridotte le frazioni ad un denominatore comune, senz'alterarne il valore. Così, quanto alla frazione $\frac{1}{4}$, dividendo 252 per 4, si ottiene il quoziente 63: quest'è il numero per cui è stato moltiplicato il denominatore 4 per divenire 252; per lo stesso 63 moltiplicheremo il numeratore, e la frazione $\frac{63}{252}$ sarà equivalente a $\frac{1}{4}$. Operando allo stesso modo sulle altre frazioni, avremo

$$\frac{5}{6}=\frac{210}{252}\ \frac{8}{9}=\frac{224}{252}\ \frac{11}{14}=\frac{198}{252}\ \frac{7}{14}=\frac{147}{252}.$$

Se questa riduzione si fosse eseguita col primo metodo, il denominatore comune sarebbe stato 36288.

Sottrazione.

49. Di due frazioni diseguali considerando la maggiore come somma della minore e di un altra che si cerca, è chiaro che le frazioni per potersi sottrarre debbono avere lo stesso denomina-

(e) Non solo il 252 è divisibile per ognuno dei denominatori, ma ancora è il numero più piccolo che abbia questa proprietà. Supponiamo infatti che nel prodotto $2.2.3.3.7$ si togliesse uno dei fattori 2, esso non sarebbe più divisibile nè per 4, nè per 12: si può dire altrettanto per ciascuno degli altri fattori Quindi un numero che gode di tale proprietà, ha ricevuto il nome di *minimo dividendo comune*.

tore; e che soddisfatta questa condizione, otterremo il residuo sottraendo dal numeratore della frazione maggiore quello della minore. Così

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5},\ \frac{7}{8}-\frac{4}{8}=\frac{3}{8}.$$

Se le frazioni avessero differente denominatore, si ridurranno allo stesso denominatore, prima di procedere alla sottrazione. Sia $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}$ la sottrazione da farsi: si riducano le due frazioni allo stesso denominatore, e si avrà $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40}{56}-\frac{21}{56}=\frac{19}{56}$.

50. Supponiamo che da 6 si voglia sottrarre $\frac{3}{4}$. Essendo $6=5+1=5+\frac{4}{4}$, si ha $6-\frac{3}{4}=5+\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=5+\frac{1}{4}$. Similmente $3-\frac{5}{8}=2+\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=2+\frac{3}{8}$.

51. Da 15 volendosi sottrarre $4+\frac{5}{9}$, scomporremo 15 in $14+\frac{9}{9}$, ed avremo

$$15-\left(4+\frac{5}{9}\right)=\left(14+\frac{9}{9}\right)-\left(4+\frac{5}{9}\right).$$

$$\begin{array}{r} 14+\frac{9}{9} \\ 4+\frac{5}{9} \\ \hline 10+\frac{4}{9} \end{array}$$

Ora sottraendo 4 da 14, e $\frac{5}{9}$ da $\frac{9}{9}$, si ottiene il residuo $10+\frac{4}{9}$.

52. Sia $8+\frac{1}{3}$ il numero che si vuol sottrarre da

$13 + \frac{5}{7}$. Riducendo allo stesso denominatore

le frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{1}{3}$, si ha $13 + \frac{5}{7} = 13 + \frac{15}{21}$,

$8 + \frac{1}{3} = 8 + \frac{7}{21}$. Sottraendo i numeri corrispondenti,

come qui a lato si vede, si ottiene il residuo $5 + \frac{8}{21}$.

$$\begin{array}{r} 13+\frac{15}{21} \\ 8+\frac{7}{21} \\ \hline 5+\frac{8}{21}. \end{array}$$

Se la frazione del numero somma fosse minore dell' altra, si potrà operare come nell' esempio seguente. Sia $\left(9+\frac{3}{5}\right) - \left(4+\frac{7}{8}\right)$ la sottrazione da eseguirsi. Dopo aver ridotte le frazioni allo stesso denominatore, ossia $\left(9+\frac{24}{40}\right) - \left(4+\frac{35}{40}\right)$, vediamo che da $\frac{24}{40}$ non si può sottrarre $\frac{35}{40}$; allora prenderemo 1 da 9, e ridotta quest' unità a 40^{mi},

avremo $\left(8+\frac{64}{40}\right) - \left(4+\frac{35}{40}\right) = 4 + \frac{29}{40}$

Moltiplicazione.

53. Sia $\frac{3}{7}$ da moltiplicarsi per 4. Il prodotto, che si cerca, è il risultato di un' addizione in cui il $\frac{3}{7}$ è ripetuto 4 volte; e siccome l' addizione delle frazioni si esegue aggiungendo i numeratori, così il numeratore 3 sarà ripetuto 7 volte, ed avremo

$$\frac{3}{7}\times 4=\frac{12}{7}=1+\frac{5}{7}.$$

Supponiamo ora che 5 dovesse moltiplicarsi per $\frac{4}{9}$. Se il moltiplicatore fosse 4 in vece di $\frac{4}{9}$, il prodotto sarebbe $5\times 4=20$. Ma avendo trasformato il $\frac{4}{9}$ in 4 unità, il suo valore è divenuto 9 volte più grande; dunque il prodotto 5×4 è 9 volte maggiore del vero, ed il suo giusto valore sarà $\frac{5\times 4}{9}=\frac{20}{9}=2+\frac{2}{9}$.

Da questi due casi di moltiplicazione si deduce che il valore di un prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori, anche nell'ipotesi che questi siano frazionarî, poichè troviamo

$$5\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\times 5.$$

54. Veniamo al caso di due fattori frazionarî; e sia $\frac{3}{5}$ da moltiplicarsi per $\frac{4}{7}$. Supponendo che il moltiplicatore fosse 4 in vece di $\frac{4}{7}$, il prodotto sarebbe $\frac{3\times 4}{5}$, sette volte maggiore del prodotto $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$, essendo 4 sette volte più grande di $\frac{4}{7}$. Dunque l'esatto prodotto sarà $\frac{3\times 4}{5}:7$; e siccome (n. 43.V) moltiplicando il denominatore di una frazione per un numero, il suo valore viene diviso per lo stesso numero, così avremo $\frac{3\times 4}{5}:7=\frac{3\times 4}{5\times 7}=\frac{12}{35}$.

Dall' analisi dell' ultimo esempio si rileva che a formare il prodotto di due frazioni concorrono la moltiplicazione e la divisione ; poichè dicendo che $\frac{3}{5}$ si vuol moltiplicare per $\frac{4}{7}$, il vero senso dell'espressione è che si vuol ripetere 4 volte la 7ª parte di $\frac{3}{5}$, ossia che $\frac{3}{5}$ si vuol moltiplicare per 4 e dividere per 7. Donde segue che il prodotto di due frazioni è minore di ciascuna di esse, poichè ognuna è moltiplicata per un numero minore e divisa per un numero maggiore ; così $\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$ è minore di $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$, e di $\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$. Ne risulta benanche che, date le altre cose eguali, un prodotto di più frazioni va decrescendo come aumenta il numero de' fattori ; per esempio, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ è maggiore di $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}$, e questo supera $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}$, ec.

55. Supponiamo $5+\frac{3}{4}$ uno dei fattori e 7 l' altro. Si potrà moltiplicare sì 5 che $\frac{3}{4}$ per 7, i di cui prodotti addizionati danno $35+\frac{21}{4}=35+5+\frac{1}{4}=40+\frac{1}{4}$; ovvero dopo aver ridotto $5+\frac{3}{4}$ all' espressione frazionaria $\frac{23}{4}$, si moltiplicherà questa per 7, e si avrà $\frac{23}{4}\times7=\frac{161}{4}=40+\frac{1}{4}$.

56. Finalmente se i due fattori fossero composti d' interi e frazioni, come $\left(7+\frac{2}{3}\right)\times\left(5+\frac{3}{8}\right)$, si avrebbe, riducendo ciascuna ad una sola espressione frazionaria,

$$\left(7+\frac{2}{3}\right)\times\left(5+\frac{3}{8}\right)=\frac{23}{3}\times\frac{43}{8}=\frac{989}{24}=41+\frac{5}{24}$$

Divisione.

57. Sia $\frac{6}{7}$ da dividersi per 3. Poichè $\frac{6}{7}$ si considera prodotto di 3 per una frazione, secondo la teorica della moltiplicazione bisognerà dividere 6 per 3, ed il quoziente 2 sarà il numeratore della frazione richiesta; quindi avremo $\frac{6}{7}:3=\frac{2}{7}$.

Quando il numeratore della frazione data non fosse divisibile per l'intero, allora ne moltiplicheremo il denominatore (n.° 43. V.): così $\frac{5}{8}:2=\frac{5}{16}$.

Supponiamo 5 il dividendo e $\frac{3}{4}$ il divisore. Dividendo 5 per 3, si ottiene il quoziente $\frac{5}{3}$, il quale è 4 volte minore del vero, perchè 5 è stato diviso per 3, numero 4 volte maggiore di $\frac{3}{4}$: dunque l'esatto quoziente è $\frac{5}{3}\times4=\frac{5\times4}{3}=\frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}$

58. Siano dividendo e divisore frazionari: $\frac{5}{7}$ per esempio, da dividersi per $\frac{3}{8}$. Dividendo $\frac{5}{7}$ per 3 il quoziente è $\frac{5}{7.3}$, otto volte minore del vero, perchè $\frac{5}{7}$ è stato diviso per 3, otto volte maggiore di $\frac{3}{8}$. A rendere esatto il quoziente, è dunque necessario

moltiplicare $\frac{5}{7\,3}$ per 8, e si ha $\frac{5}{7}:\frac{3}{8}=\frac{5\,8}{7.3}=\frac{40}{21}=1+\frac{19}{21}$.

Nel caso che i due termini della divisione, od anche un solo, fossero numeri interi uniti a frazioni, dopo averli ridotti ad espressioni frazionarie, si calcoleranno come si è fatto sugli esempi precedenti. Così

$$8:\left(2+\frac{3}{5}\right)=8:\frac{13}{5}=\frac{8.5}{13}=\frac{40}{13}=3+\frac{1}{13},$$

$$\left(7+\frac{2}{3}\right):4=\frac{23}{3}:4=\frac{23}{3.4}=\frac{23}{12}=1+\frac{11}{12},$$

$$\left(14+\frac{7}{8}\right):\left(5+\frac{2}{3}\right)=\frac{119}{8}:\frac{17}{3}=\frac{119.3}{8.17}=\frac{357}{136}=2+\frac{85}{136}$$

La divisione di un intero per una frazione, o di una frazione per un'altra, è un'operazione composta (come si rileva dagli esempi precedenti) di moltiplicazione e divisione. Quando dividiamo 7 per $\frac{2}{3}$, il numero 7 è moltiplicato per 3 e diviso per 2; così ancora dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$, il $\frac{3}{4}$ è moltiplicato per 6 e diviso per 5. In conseguenza quando il divisore è una frazione vera, il quoziente sarà necessariamente maggiore del dividendo; e questo risultato è una deduzione necessaria dell'idea di divisione, poichè se consideriamo un numero come prodotto di due fattori, di cui facciamo uno eguale all'unità, l'altro sarà evidentemente eguale al numero proposto; e se poniamo il primo fattore minore dell'unità, è chiaro che il secondo dovrà superare il prodotto dato. Donde segue che nell'ipotesi di un divisore frazionario con un dividendo qualunque, il quoziente aumenta come la frazione diminuisce; e quando questa sia pervenuta al limite delle quantità decrescenti ossia *zero*, il quoziente avrà toccato il limite delle quantità crescenti ossia l'*infinito*, che viene indicato dal segno ∞; quindi si comprende il significato dell'espressione $\frac{m}{0}=\infty$, m disegnando un numero qualunque.

FRAZIONI DECIMALI

59. La parte che prendono i denominatori nel calcolo delle frazioni, ne fa laboriosa la pratica. A rendere questa più spedita, si è inventato il sistema delle frazioni decimali, in cui le operazioni vengono eseguite con le stesse leggi dei numeri interi.

60. Per comporre il sistema delle frazioni decimali, si è immaginata l' unità divisa in 10, 100, 1000, ec. parti eguali, a cui si sono dati i nomi *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, ec. E come un decimo contiene dieci centesimi, un centesimo dieci millesimi, ec.; così la divisione precedente equivale a supporre l' unità divisa e suddivisa successivamente in dieci parti; donde il nome di *frazioni decimali*.

La numerazione delle frazioni decimali è dunqne identica con quella dei numeri interi, e perciò esse saranno scritte secondo gli stessi princip. Supponiamo che si debba scrivere il numero 34 unità e 7 decimi. Essendo i decimi dieci volte minori delle unità, ne occuperanno il primo posto a destra, e per distinguerli da quelle si è convenuto separarli con una virgola; quindi l' espressione richiesta sarà 34, 7. Se il numero contenesse inoltre 5 centesimi ed 8 millesimi, è facile dedurre che la cifra dei centesimi sarebbe scritta alla destra dei decimi, quella dei millesimi alla destra dei centesimi, e si avrebbe 34, 758. Mancando l' intero, il posto ne sarà occupato da un zero; così 0, 8 vuol dire *otto decimi*.

Sarebbe incomoda la lettura di una frazione decimale, se dovesse pronunziarsi il valore proprio e di sito di ciascuna cifra, come se 0, 374 dovesse leggersi *tre decimi*, *sette centesimi*, e *quattro millesimi*. Ma essendo 3 decimi equivalenti a 30 centesimi, ridurremo 3 decimi e 7 centesimi all'espressione 37 centesimi; similmente un centesimo contenendo 10 millesimi, avremo 37 centesimi e 4 millesimi eguali a 374 millesimi. Dunque una frazione decimale si leggerà come un numero intero, aggiungendovi soltanto il nome di sito dell' ultima cifra. Questo nome è l' espressione del denominatore che nella frazione scritta viene indicato dal numero delle cifre.

Se qualcuna delle suddivisioni decimali dell' unità mancasse in una frazione, il suo posto sarebbe occupato dallo zero, per conservare alle cifre significative il valore di sito; così la frazione 42 millionesimi sarà scritta 0, 000042.

61. Nell'espressione 43, 75 trasportando la virgola tra 4 e 3

avremo 4, 375. Ora in quest' ultima espressione ciascuna cifra ha preso un valore di sito dieci volte minore; in conseguenza la frazione 4, 375 è la decima parte di 43, 75: se la virgola si fosse avanzata di un altro posto a sinistra, si sarebbe ottenuto o, 4375 centesima parte di 43, 75. Dunque un' espressione decimale diverrà 10, 100, 1000, ec. volte minore, facendo progredire la virgola di 1, 2, 3, ec. posti a sinistra; e viceversa diverrà 10, 100, 1000, ec. volte maggiore, se il movimento della virgola si faccia verso la destra: così $9,753 \times 100 = 975,3$.

Aggiungendo un zero alla sinistra di o, 24 avremo o, 024 decima parte di o, 24, perchè ciascuna cifra ha preso un valore dieci volte minore; similmente o, 0024 sarà centesima parte di o, 24, ec. Dunque una frazione decimale diverrà 10, 100, 1000, ec. volte minore aggiungendo 1, 2, 3, ec. zeri alla sinistra di essa. Come d' altronde il togliere 1, 2, 3, ... zeri dalla sinistra renderà una frazione decimale 10, 100, ec. volte maggiore; così

$$0,007 \times 100 = 0,7.$$

Se poi gli zeri fossero aggiunti o tolti alla destra, il valore della frazione restarebbe costante, perchè non alterato il valore di sito di ogni cifra; quindi $0,7 = 0,70 = 0,700$, ec.

Un numero intero sarà diviso per 10, 100, 1000, ec. separando dalla sua destra 1, 2, 3, ec. cifre con una virgola; così

$$4528 : 100 = 45,28, \quad 964 : 10 = 96,4.$$

Questi teoremi sulle frazioni decimali divengono casi particolari di quelli esposti al n.° 43 sulle frazioni in generale, quando alle frazioni decimali si dia la forma di frazioni ordinarie. In fatti, si è veduto (n.° 61) che il movimento della virgola verso la destra o la sinistra moltiplica o divide l' espressione decimale successivamente per 10; così

$42,56 \times 10 = 425,6$. Ora $42,56 = \frac{4256}{100}$;

in conseguenza

$42,56 \times 10 = \frac{4256}{100} \times 10 =$ (n.° 43. V.) $\frac{4256}{10} = 425,6$.

Inoltre abbiamo (n.° 61) $0,37 : 10 = 0,037$;

ma $0,37 = \frac{37}{100}$; dunque $\frac{37}{100} : 10 =$ (n.° 43. V.) $\frac{37}{1000} = 0,037$.

Addizione.

62. Essendo le frazioni decimali, tanto sole che unite a numeri interi, sottoposte al medesimo sistema di numerazione di questi ultimi, esse seguiranno evidentemente la stessa legge nella loro addizione. Quindi le scriveremo in colonne verticali in modo che le cifre le quali hanno lo stesso valore di sito si corrispondano nella stessa linea; ed incominceremo ad addizionare quelle del valore minimo, perchè la loro somma potrà somministrare qualche unità all' ordine immediatamente superiore. Questa teorica è così semplice che gli esempî seguenti non hanno bisogno di schiarimento.

Esempî.

```
   8, 243           56, 9
  75, 9            432, 074
   9, 76             8, 32
 534, 937           23, 8653
   7, 4            345, 572
  25, 0398          32, 46
 ---------           5, 7397
 661, 2798        ---------
                   904, 9310
```

Sottrazione.

63. Sia 0, 8367 la frazione decimale, da cui si vuol sottrare 0, 5423. Siccome la somma 0, 8367 è stata composta dalla parte nota 0, 5423 e dal residuo incognito come fossero stati numeri interi; in conseguenza operando con lo stesso metodo degl' interi, avremo il resto 0, 2944.

```
0, 8367
0, 5423
-------
0, 2944
```

Se la frazione somma avesse minor numero di cifre della parte nota, allora vi si aggiungeranno degli zeri per eguagliare le quantità di cifre nei due numeri; essendo noto (n.° 61) che gli zeri aggiunti alla destra di un decimale, non ne mutano il valore. Tal' è il caso di 0, 97—0, 3857.

```
0, 9700
0, 3757
-------
2, 5943
```

Si terrà lo stesso metodo, quando da un intero si debba sottrarre una frazione decimale. Sia 7—0, 943 la sottrazione da farsi. In vece di 7 scriveremo l'equivalente 7, 000; e poi eseguiremo l'operazione col metodo conosciuto.

$$\begin{array}{r} 7,000 \\ 0,943 \\ \hline 6,057 \end{array}$$

Del resto il calcolatore in simili casi può dispensarsi dallo scrivere gli zeri, osservando che basta fare la prima sottrazione da 10 e le altre da 9 per tutte quelle cifre della parte nota che non hanno le corrispondenti nella somma data.

Moltiplicazione

64. Sia 9, 58 da moltiplicarsi per 4, 7. Facciamo astrazione dalla virgola, ed eseguiamo la moltiplicazione come se i fattori fossero numeri interi. Il prodotto 45026, per l'alterazione portata al moltiplicando, è 100 volte maggiore di quello che sarebbe stato, se in vece del fattore 958 si fosse adoperato il vero fattore 9, 58. Per correggere questa prima alterazione bisognerà dividere 45026 per 100; e 450, 26 rappresenterà il prodotto di 9, 58 per 47. Ma questo secondo fattore doveva essere 4, 7, ossia dieci volte minore di quello ch'è stato nell'eseguire la moltiplicazione; dunque 450, 26 è dieci volte maggiore del vero; per ciò la virgola dovrà progredire di un posto a sinistra, e l'esatto prodotto sarà 45, 026. Ciò vale a dire che dal prodotto bisognerà separare con una virgola tante cifre decimali, quante se ne trovano nei due fattori.

$$\begin{array}{r} 9,58 \\ 4,7 \\ \hline 6706 \\ 3832 \\ \hline 45,026 \end{array}$$

Se le cifre del prodotto non fossero in numero sufficiente, allora si procederà come nell'esempio che segue. Sia 0, 724 da moltiplicarsi per 0,008. Dopo aver ottenuto il prodotto 5792, e corretta l'alterazione apportata al moltiplicando per la quale il prodotto si riduce a 5, 792, si osservi che per dare a questo numero il suo giusto valore bisognerà dividerlo per 1000, ossia far progredire la virgola di tre posti a sinistra; e siccome alla sinistra della virgola non vi è che una sola cifra, gli altri due posti saranno occupati da zeri, e l'esatto prodotto sarà 0,005792. Dunque nel caso che le cifre del prodotto non bastino, si supplirà al difetto coll'aggiungere tanti zeri alla sinistra, per quante cifre mancano alla quantità richiesta.

$$\begin{array}{r} 0,724 \\ 0,008 \\ \hline 0,005792 \end{array}$$

Questa legge della moltiplicazione dei decimali ha luogo qualunque sia il numero dei fattori. Se si avesse a comporre il pro-

dotto 7, 94 × 5, 8 × 9, 46; dopo aver trovato il prodotto . . . . . 7, 94 × 5, 8 = 46, 052 , si riguarderebbe questo numero come moltiplicando e 9, 46 come moltiplicatore ; quindi dal nuovo prodotto dovranno separarsi cinque cifre decimali , vale a dire quante ne contengono i tre fattori.

65. Talune volte in un problema, che conduce ad una moltiplicazione di decimali, si determina anticipatamente l'ordine minimo delle cifre a cui si giudica sufficiente limitare il valore del prodotto: così se nella moltiplicazione di 4, 7956 per 3, 8279 si volesse il prodotto limitato ai dieci-millesimi, sarebbe inutile eseguire interamente l'operazione, perchè si avrebbe un risultato con otto cifre decimali , di cui bisognerebbe cancellarne quattro. In questo caso è più comodo l'incominciare l'operazione dalla prima cifra a sinistra del moltiplicatore; e così facendo si ottiene 14, 3868 prodotto di 4, 7956 per 3 : indi si farà il prodotto di 4, 7956 per 0, 8 ; e scrivendolo sotto al primo si farà avanzare la prima cifra 8 di un posto alla destra , perchè indica cento-millesimi. Il prodotto di 4, 7956 per 0, 02 dovrebbe situarsi con la stessa legge sotto al secondo ; ma trascurando il prodotto di 6 per 2 , si comincerà dal moltiplicare 5 per 2 , ed il primo prodotto parziale verrà sotto la prima cifra del secondo. Similmente la 4ª moltiplicazione si principierà dal 9 , e la 5ª dal 7 , segnando sempre con un punto la cifra che si trascura — Si è calcolata espressamente una cifra di più di quelle che si volevano al prodotto , ad oggetto di ottenerne la ritenuta per aggiungerla alla somma della colonna seguente , senza la quale ritenuta la quarta cifra del prodotto sarebbe stata troppo piccola. Questa norma non dovrà giammai negligersi. Eccone altri esempi

```
      . . .
  4, 7956
  3, 8279
 ---------
 14, 3868
  3, 83648
      9590
      3353
       423
 ---------
 18, 3569
```

```
      . . .
  0, 49576
  0, 7394
 -----------------
 0, 347032  per 7
      14871 ..... 3
       4455 ..... 9
        196 ..... 4
 -----------------
 0, 36655
```

```
        . . . .
   54, 73954
    6, 38569
 ---------------------
 328, 43724    per 6
  16, 421862 ..... 3
   4, 379160 ..... 8
    , 273695 ..... 5
       32838 ..... 6
        4923 ..... 9
 ---------------------
 349, 54971
```

Divisione.

66. Sia 37, 296 da dividersi per 7. Le 37 unità divise per 7, danno il quoziente 5 col residuo 2. Queste ridotte in decimi ne danno 20; ed aggiunti i 2 decimi del dividendo, avremo 22 decimi da dividere per 7: per ciò il quoziente 3, indicando decimi, sarà con una virgola distinto dal 5 che rappresenta unità. Continuando allo stesso modo l'operazione, trovaremo l' esatto quoziente 5, 328.

```
37,296 | 7
 2,15    5,328
```

Supponiamo 0, 93262 il dividendo e 34 il divisore. Non essendovi unità da dividere, scriveremo zero al quoziente. Passando ai decimi, 9 non è divisibile per 34, in conseguenza avremo anche zero al posto dei decimi. La divisione comincia a dare cifre significative da 93 centesimi che divisi per 34, danno per quoziente 2 centesimi. Il resto dell'operazione non offre alcuna difficoltà.

```
0,93262 |34
 68       0,02743
 ---
 252
 238
 ---
  146
  136
  ---
   102
   102
   ===
```

Sia ancora 41, 35 da dividersi per 8, 27. Essendo una divisione equivalente ad un' espressione frazionaria, potremo scrivere $\frac{41,35}{8,27}$ per valore del quoziente; e siccome un' espressione frazionaria resta costante, allorchè si moltiplicano i due termini per uno stesso numero, così moltiplicheremo per 100 i due termini di $\frac{41,35}{8,27}$, e 4135 diviso per 827 darà lo stesso quoziente di 41, 35 diviso per 8, 27. Se i due termini della divisione non hanno egual numero di cifre decimali, si aggiungeranno degli zeri al termine che ne ha meno, sapendosi (n.° 61) che ciò non altera il suo valore. Così $\frac{48,2}{5,724}=\frac{48,200}{5,724}=\frac{48200}{5724}$.

Riduzione delle frazioni ordinarie a decimali.

67. Sia $\frac{3}{8}$ la frazione che si vuol ridurre ad espressione decimale. Una frazione equivalendo al quoziente di una divisione (n.° 43. I), in cui il numeratore è dividendo ed il denominatore è divisore; divideremo 3 per 8, e non essendovi quoziente intero, uno zero ne occuperà il posto. Indi ridurremo le 3 unità a 30 decimi, i quali divisi per 8 daranno il quoziente 0, 3 ed il residuo 0, 6. Cambiando questi in centesimi, ed il residuo della loro divisione per 8 in millesimi, avremo finalmente $\frac{3}{8} = 0,375$. Con lo stesso metodo si avranno $\frac{7}{25} = 0,28$, $\frac{31}{80} = 0,3875$, $\frac{67}{400} = 0,1675$, ec.

30	8
60	0, 375
40	

Le frazioni recate ad esempio e gran numero di altre sono riducibili esattamente a decimali pei fattori primi, da cui sono composti i denominatori. Poichè essendo $8 = 2.\ 2.\ 2$; $25 = 5.\ 5$, $80 = 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 5$, $400 = 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 5.\ 5$, e l'addizione continua degli zeri ai residui delle divisioni parziali equivalendo ad una successiva moltiplicazione per $10 = 2.\ 5$; si perverrà necessariamente ad un dividendo nel quale si potranno sopprimere tutti i fattori del divisore, e quindi (n.° 39) si avrà un esatto quoziente. Tutto questo riguarda il caso in cui i due termini della frazione fossero primi tra loro: se ciò non avesse luogo, potrebbero esistere nel denominatore fattori diversi da 2 e 5, senza nuocere alla suscettibilità di essere esattamente tradotta in espressione decimale; tal'è, per esempio, la frazione $\frac{63}{280}$. Il denominatore 280 decomposto nei suoi fattori primi, si trova risultare da 2. 2. 2. 5. 7; ma siccome 7 è benanche fattore del numeratore, così può trasformarsi in decimale, e si ottiene. . . . .
$\frac{63}{280} = 0,225$.

68. Mancando nel denominatore il carattere esposto nel n.° precedente, l'esatta riduzione a decimale non è possibile: e poichè i residui delle divisioni sono compresi tra i limiti 1 ed $n-1$, n disegnando il denominatore, dovrà necessariamente ritornare uno dei dividendi parziali, quindi il rispettivo quoziente, e l'operazione non avrà giammai termine. In questo caso la frazione decimale prende il nome di *periodica* dal ritorno delle stesse cifre al quoziente. Sia, per esempio la frazione $\frac{3}{7}$ il di cui denominatore dimostra essere irreducibile ad esatta espressione decimale. Ora i residui non possono essere che 1, 2, 3, 4, 5, 6, poichè 0 e 7 indicarebbero una divisione esatta; dunque dopo sei divisioni, al massimo, ritornerà lo stesso dividendo, come il fatto conferma.

```
30    |7
 20    0, 428571 4...
  60
   40
    50
     10
      30
       ec.
```

69. Se le cifre del periodo, nell'ipotesi che il divisore sia numero primo, non sono eguali alle unità del divisore meno una, di questo numero saranno almeno parte aliquota: così $\frac{9}{11}$, $\frac{21}{37}$ danno i periodi 0, 8181...., 0, 567567..... Ora pel primo periodo 2 è divisore esatto di $11-1$, e pel secondo 3 lo è di $37-1$.

70. Quando il denominatore non sia numero primo, il periodo può non principiare dalla prima cifra; tal' è, per esempio la frazione $\frac{193}{485}$ la quale ridotta in decimale dà 0, 38989....., in cui osservasi la cifra 3 estranea al periodo.

71. Se la riduzione di una frazione ordinaria a decimale conduce ad una forma periodica, a questa non potremo applicare le regole del calcolo, senza dare un limite alla quantità delle sue cifre. Questo limite dipende dalla grandezza dell' unità, alla quale la frazione si riferisce: se 0, 0001 di piede è una parte trascurabile, non lo sarà certamente 0, 0001 del raggio terrestre. Determinato l' ordine della cifra con cui si vuol terminare la frazione, le altre cifre si ometteranno; e perchè quest' omissione apporti il più piccolo errore, sugli esempi seguenti trovaremo le regole da seguirsi.

1° Sia la frazione 0, 68 di cui si vuol trascurare la cifra 8 e limitarla ai soli decimi. Se mentre togliesi la cifra 8 si aggiunga 1 ai decimi, l' errore sarà $0,10-0,08=0,02$; ed

essendo l'errore o, o2 per eccesso preferibile a o, o8 per difetto, aggiungeremo 1 ai decimi, ed avremo o, 7 in vece di o, 6.

2° Sia o, 85 la frazione che si vuole ridurre ai soli decimi. Se togliamo 5, mancheranno o, o5; se aggiungiamo 1 ai decimi, l'errore sarà o, 10 — o, o5 = o, o5 di eccesso. È dunque indifferente in simili casi aggiungere, o pur no, 1 ai decimi.

3° Supponiamo ancora voler limitare ai soli decimi la frazione o, 43. Togliendo la cifra 3, si fa un errore di o, o3 per difetto; ma se nel tempo stesso si aggiungesse 1 ai decimi, l'errore finale sarebbe o, 10 — o, o3 = o, o7 per eccesso. Vale meglio dunque non aggiunger nulla ai decimi, mentre si toglie la cifra dei centesimi.

Da questi tre casi si rileva che volendo togliere una sola cifra alla destra di una frazione decimale, si aggiungerà 1 alla cifra precedente nel caso che la cifra tolta sia maggiore di 5.

4° Se poi si volessero togliere più cifre alla destra di una frazione decimale, si procederà nel seguente modo. Sia o, 7548 la frazione in cui si vogliono sopprimere le tre ultime cifre: l'errore per difetto sarebbe o, o548. Ma se aggiungasi 1 alla cifra 7, si avrà l'errore per eccesso o, 1000 — o, o548 = o, o452, minore del primo; ed anche più piccolo sarebbe stato l'errore, se la prima delle cifre tolte fosse stata maggiore di 5. Al contrario se essa fosse stata minore, bisognava non alterare la cifra precedente, per evitare un errore più grande.

Ritorno delle frazioni decimali ad ordinarie.

72. Incominciamo dal caso di una frazione decimale finita. Se essa è traduzione di una frazione ordinaria, questo passaggio è dovuto ad una divisione, nella quale i dividendi parziali sono stati moltiplicati successivamente per 10, mentre alle cifre dei rispettivi quozienti si è dato un valore suddecuplo, ossia si è moltiplicato successivamente per 10 il denominatore sotto-inteso. Ora togliendo per mezzo del massimo comune divisore questi fattori aggiunti dal processo dell'operazione, la frazione ritornerà alla forma primitiva. Sia, per esempio, la frazione o, 725; dopo averla scritta a modo di frazione ordinaria, cioè $\frac{725}{1000}$, si cercherà il massimo comune divisore tra 725 e 1000, che sarà 25; per questo numero si divideranno i due termini di $\frac{725}{1000}$, e si

avrà $\frac{29}{40}$ che sarà la frazione richiesta. Se poi questi termini in una data frazione non avessero altro fattore comune che l'unità, la frazione proposta non potrebbe riguardarsi come derivata da frazione ordinaria; tal'è per esempio 0, 37.

73. Supponiamo ora una frazione periodica, e tale che il periodo cominci dalla prima cifra dopo la virgola, come 0, 7272.... Se moviamo la virgola in modo da farne passare alla sinistra un intero periodo, avremo 72, 7272...., 100 volte maggiore della frazione data. Indi da 72, 7272.... sottraendo 0, 7272..., otterremo il residuo 72 che sarà 99 volte maggiore della frazione 0, 7272.... ; in conseguenza questa equivale a $\frac{72}{99}=\frac{8}{11}$. Da questo esempio è facile dedurre, per l'analogia del calcolo, che la frazione avendo un periodo di 1, 2, 3,... *n* cifre, queste formeranno il numeratore ed altrettanti 9 ne comporranno il denominatore.

74. Il metodo poi da tenersi nell'ipotesi che il periodo non cominci dalla prima cifra, è dichiarato ad evidenza nei due esempi seguenti:

$$0,75454\ldots=\frac{7,54\ldots}{10}=\frac{7}{10}+\frac{0,54\ldots}{10}=\frac{7}{10}+\frac{\frac{54}{99}}{10}=\frac{7}{10}+\frac{54}{990}$$

$$=\frac{7}{10}+\frac{6}{110}=\frac{7.11}{10.11}+\frac{6}{110}=\frac{77+6}{110}=\frac{83}{110}.$$

$$0,314545\ldots=\frac{31,4545\ldots}{100}=\frac{31}{100}+\frac{0,45\ldots}{100}=\frac{31}{100}+\frac{\frac{45}{99}}{100}=\frac{31}{100}+\frac{45}{9900}$$

$$=\frac{31}{100}+\frac{5}{1100}=\frac{31.11}{100.11}+\frac{5}{1100}=\frac{341+5}{1100}=\frac{346}{1100}=\frac{173}{550}$$

POTENZE E RADICI

Definizioni.

75. Un prodotto di più fattori eguali dicesi *potenza*, la quale si distingue in *seconda*, *terza*, *quarta*, ec. secondochè è composta di 2, 3, 4, ... fattori eguali: così $5 . 5 = 25$ è *seconda potenza* di 5, $7 . 7 . 7 = 343$ è *terza potenza* di 7. La cifra che indica quante volte un numero è preso come fattore, dicesi *esponente*, e viene situata alla sua destra nella parte superiore per abbreviare l'espressione della potenza: così 9^3, 5^4 sono equivalenti a *nove elevato a terza potenza*, e *cinque elevato a quarta potenza*. Similmente $7^2 \times 3^4 \times 5^3$ vuol dire che bisogna trovare la 2ª potenza di 7, la 4ª potenza di 3, e la 3ª potenza di 5; e poi farne un prodotto.

76. Il fattore costante, da cui è risultata la potenza, dicesi *radice*, che parimente alla potenza si distingue in *seconda*, *terza*, ec: così 9 è la *radice seconda* di 81, 5 è la *radice terza* di 125, poichè $9^2 = 81$, $5^3 = 125$. Il segno $\sqrt{\ }$ messo avanti ad un numero indica che se ne vuole la radice: se questa è la *seconda*, nulla si aggiungerà al segno $\sqrt{\ }$, poichè non avvi radice di grado inferiore; ma si scriverà $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ec. per indicare la radice terza, quarta, ec: quindi $\sqrt{25}$, $\sqrt[4]{16}$ disegnano la radice 2ª di 25, e la radice quarta di 16. Il numero 3, 4, ec. messo sul segno $\sqrt{\ }$, si chiama *indice della radice*.

La 2ª. e 3ª. potenza si chiamano ancora *quadrato* e *cubo*; e le rispettive radici *quadrate* e *cubiche*. Questi nomi derivano da teoremi geometrici.

Composizione della 2ª e 3ª potenza.

77. Per ottenere una potenza di un dato numero è sufficiente la successiva moltiplicazione del numero per se stesso: volendosi, per esempio, la 3ª potenza di 74, si moltiplicherà 74 per se stesso; il prodotto 5476 moltiplicato un'altra volta per 74, dà

405224, ch'è il numero richiesto. Ma questo metodo, non dichiarando il modo con cui le unità, decine, ec. del numero proposto entrano nella composizione della potenza, non offre alcun dato alla soluzione del problema inverso; cioè *essendo dati il valore della potenza, e l'indice della radice, determinare il valore di questa.* Alla soluzione di questo problema è destinata la teorica seguente.

78. Sia $5+3$ un numero composto di due parti, del quale si cerca la legge di composizione per la 2ª potenza. Abbiamo $(5+3)^2=(5+3)(5+3)$; ossia che $5+3$ dovrà ripetersi prima 5 volte, e poi 3 volte. Per moltiplicare $5+3$ per 5 basterà ripetere 5 volte il 5 e 5 volte il 3; così avremo $(5+3).5=5.5+5.3$. Similmente $5+3$ ripetuto 3 volte, darà $5.3+3.3$; dunque

$$(5+3)^2=(5+3)(5+3)=5^2+2.5.3+3^2;$$

vale a dire che la 2ª potenza di un numero di due parti si compone della 2ª potenza della prima parte, più due volte il prodotto della prima per la seconda parte, più la 2ª potenza di quest'ultima.

Applicando questo teorema ad un numero composto di decine ed unità, come 37, avremo

$$37^2=(30+7)^2=30^2+2.30.7+7^2.$$

Similmente

$$476^2=(470+6)^2=470^2+2.470.6+6^2$$

Ora $470^2=(400+70)^2=400^2+2.400.70+70^2$. Sostituendo questo valore di 470^2, avremo

$$476^2=400^2+2.400.70+70^2+2.470.6+6^2$$

Operando nello stesso modo trovaremo

$$3847^2=3000^2+2.3000.800+800^2+2.3800.40+40^2$$
$$+2.3840.7+7^2.$$

$$49635^2=40000^2+2.40000.9000+9000^2+2.49000.600$$
$$+600^2+2.49600.30+30^2+2\ 49630.5+5^2.$$

79. Moltiplicando $5^2 + 2.5.3 + 3^2$ per $5 + 3$, avremo la 3^a. potenza di questo numero.

Ora $(5^2 + 2.5.3 + 3^2) \times 5 = 5^3 + 2.5^2.3 + 3^2.5$; e $(5^2 + 2.5.3 + 3^2) \times 3 = 5^2.3 + 2.5.3^2 + 3^3$; quindi con l'addizione di questi prodotti avremo

$$(5+3)^3 = 5^3 + 3.5^2.3 + 3.5.3^2 + 3^3;$$

ossia che la 3.^{a} potenza di un numero di due parti si compone della 3^a. potenza della prima parte, più tre volte il prodotto della 2^a. potenza della prima per la seconda parte, più 3 volte il prodotto della prima per la 2^a. potenza della seconda parte, più la 3^a. potenza di quest' ultima.

Questo teorema applicato al numero 84 composto di decine ed unità, ci dà

$$84^3 = (80+4)^3 = 80^3 + 3.80^2.4 + 3.80.4^2 + 4^3$$

Supponiamo un numero di tre cifre, come 624. Scomponendolo in decine ed unità, abbiamo

$$624^3 = (620+4)^3 = 620^3 + 3.620^2.4 + 3.620.4^2 + 4^3$$

Ora

$$620^3 = (600+20)^3 = 600^3 + 3.600^2.20 + 3.600.20^2 + 20^3;$$

dunque sostituendo questo sviluppo di 620^3, avremo

$$624^3 = 600^3 + 3.600^2.20 + 3.600.20^2 + 20^3 + 3.620^2.4 + 3.620.4^2 + 4^3.$$

Con lo stesso metodo si otterrà

$$4672^3 = 4000^3 + 3.4000^2.600 + 3.4000.600^2 + 600^3 + 3.4600^2.70 + 3.4600.70^2 + 70^3 + 3.4670^2.2 + 3.4670.2^2 + 2^3.$$

80. Elevando a 2.^{a} potenza i numeri 1 e 9, 10 e 99, 100 e 999 ec. vale à dire il minimo ed il massimo nella stessa quantità di cifre, avremo

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$	ec.
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001$	

I numeri 9, 99, 999, ec. elevati a 2.ª potenza hanno una quantità di cifre doppia di quelle della radice; mentre 1, 10, 100, ec. ne danno il doppio meno uno. Quindi chiamando n la quantità di cifre del numero dato, la seconda potenza di esso avrà $2n$, o $2n - 1$ cifre.

81. Innalziamo ancora a 3.ª potenza i numeri 1 e 9, 10 e 99, ec. avremo

$1^3 = 1$ $\quad 10^3 = 1000$ $\quad 100^3 = 1000\,000$

$9^3 = 729$ $\quad 99^3 = 970299$ $\quad 999^3 = 997\,00\,2\,999$.

Donde si deduce che un numero elevato a 3.ª potenza avrà una quantità di cifre compresa tra i limiti $3n$ e $3n - 2$, n essendo la quantità di cifre della radice: in conseguenza il numemero potrà averne $3n$, $3n - 1$, o $3n - 2$.

82. La legge di composizione della 2ª. e 3ª. potenza ci ha dato (n.ⁱ 78 e 79)

$$476^2 = 400^2 + 2.400.70 + 70^2 + 2.470.6 + 6^2$$

$$624^3 = 600^3 + 3.600^2.20 + 3.600.20^2 + 20^3 + 3.620^2.4 + 3.620.4^2 + 4^3.$$

Ora sviluppando questi prodotti abbiamo:

$400^2 = 160000$	$600^3 = 216000000$
$2.400.70 = 56000$	$3.600^2.20 = 21600000$
$70^2 = 4900$	$3.600.20^2 = 720000$
$2.470.6 = 5640$	$20^3 = 8000$
$6^2 = 36$	$3.620^2.4 = 4612800$
	$3.620.4^2 = 29760$
	$4^3 = 64$

Da questi due esempî rilevasi che gli elementi, dei quali è composta la potenza di un numero, hanno alla destra degli zeri che vanno continuamente decrescendo di uno, dimodochè l'ultimo elemento termina con cifra significativa.

83. Passiamo ai numeri frazionarî. Sia $\frac{3}{8}$ la frazione che si vuole elevare a 2.ª potenza; avremo

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3.3}{8.8} = \frac{3^2}{8^2} = \frac{9}{64}$$

Volendo poi elevare la stessa frazione a 3.ª potenza, si avrà

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3.\ 3.\ 3}{8.\ 8.\ 8} = \frac{3^3}{8^3} = \frac{27}{512}$$

Dunque per innalzare a potenza una frazione, bisognerà operare sul numeratore e denominatore come fossero due numeri interi.

Se fosse un intero unito a frazione il numero che si vuole innalzare a potenza, allora si potrà ridurre ad una sola espressione frazionaria, sulla quale l'operazione procederà come nel caso precedente. Così

$$\left(7 + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{37}{5}\right)^2 = \frac{37^2}{5^2} = \frac{1369}{25}.$$

Finalmente supponiamo una frazione decimale, come 0,18. Avremo

$$0{,}18^2 = 0{,}18 \times 0{,}18 = 0{,}0324\,;$$
$$0{,}18^3 = 0{,}18 \times 0{,}18 \times 0{,}18 = 0{,}005832.$$

In questi due sviluppi si osserva che la 2.ª potenza di 0,18 ha quattro cifre, e sei ne ha $0{,}18^3$; vale a dire che la 2.ª potenza ha il doppio di cifre della radice, e la 3.ª potenza ne ha il triplo. Questo risultato è una conseguenza della legge di moltiplicazione; perchè dovendosi dal prodotto di più fattori decimali, ottenuto come fossero stati numeri interi, separare con la virgola una quantità di cifre eguale alla somma che in essi se ne trova, dovremo (chiamando n la quantità di cifre decimali della radice) averne $2n$ per la 2.ª potenza e $3n$ per la 3.ª

Paragonando ad una frazione qualunque le sue diverse potenze, si osserva che queste ne sono minori, e che il loro valore decresce coll' aumentare dell' esponente; così negli esempî precedenti si trova $\frac{9}{64} < \frac{3}{8}$ (f), $\frac{27}{512} < \frac{9}{64}$, $0{,}0324 < 0{,}18$, $0{,}005832 < 0{,}0324$.

Questo fatto è un caso particolare del teorema esposto nel n. 54.

(f) Il segno $<$ indica la diseguaglianza; la quantità minore è situata al vertice dell'angolo, e nell'apertura di esso la quantità maggiore. L'espressione, per esempio, $\frac{9}{64} < \frac{3}{8}$ si legge $\frac{9}{64}$ *minore di* $\frac{3}{8}$.

Estrazione della radice 2.ª

84. Sia 331776 il numero di cui si cerca la radice seconda. Essendo composto di 6 cifre, numero pari, avremo $6 = 2n$ (n° 80), n indicando la quantità di cifre della radice; questa dunque avrà un numero di cifre eguale a $\frac{6}{2} = 3$. Non conoscendo il

```
      |000
331776|576
25    |---------
---   |107 |1146
817   |  7 |   6
749   |--- |----
---   |749 |6876
 6876 |
```

valore proprio di queste cifre, le indicheremo con 3 zeri, per disegnarne il valore di sito. Ora dalla teorica sulla composizione della 2.ª potenza si rileva che un numero composto di centinaja, decine ed unità, avrà la 2ª. potenza formata dei seguenti elementi.

— 1.° Seconda potenza delle centinaja — Il centinajo essendo seguito da 2 zeri, ne avrà (n° 25) 4 alla 2ª. potenza. Questo primo elemento sarà dunque contenuto nel 33, la di cui radice prossima è 5: ed ecco la cifra delle centinaja che sarà scritta sotto il primo zero a sinistra. Togliendo $25 = 5^2$ da 33, il residuo 8 apparterrà all' elemento che segue.

— 2.° Due volte il prodotto delle centinaja per le decine. Questo prodotto avrà 3 zeri alla destra, avendone 2 le centinaja, ed 1 le decine; la cifra 1 del numero proposto dunque ne farà parte, ed esso sarà contenuto in 81. Moltiplicando le 5 centinaja per 2, avremo 10 uno dei fattori del prodotto richiesto; l' altro fattore, che rappresenterà la cifra delle decine, sarà .... $81 : 10 = 8$. Ora l' addizione dei diversi elementi della potenza ha potuto dare qualche ritenuta da rendere 81 maggiore del vero doppio prodotto; dimodochè il quoziente $81 : 10 = 8$ potrebbe essere maggiore del vero; quindi è d'uopo che soddisfaccia ancora alla seguente condizione.

— 3.° Seconda potenza delle decine — Avrà 2 zeri alla destra, quindi le 7 centinaja della potenza data ne faranno parte. Dunque la cifra 8, ottenuta dividendo 81 per 10, dev' esser tale che 2 volte le 5 centinaja, ossia 50 decine, moltiplicate per 8 decine, più 8 decine elevate 2.ª potenza, compongano un numero tale da potersi sottrarre da 817. Avremo dunque

$2.\ 50.\ 8 + 8^2 \leqq 817$ (g); ma la quantità a sinistra del segno $\leqq$ è

(g) Il segno $\leqq$ sta in vece dell' espressione *eguale o minore*.

maggiore; dunque 8 è troppo grande. Sostituiremo 7, che trovandosi esatto, sarà la cifra delle decine — Nel mettere così a pruova la cifra in quistione, in vece di fare un doppio prodotto ed una 2.ª potenza, si possono tutti due comprendere in una sola moltiplicazione nel seguente modo. Supponiamo dover verificare la cifra 7, avremo $2.50.7+7^2=100.7+7^2=(100+7)\times7=107.7$; basta dunque scrivere la cifra, che si vuol pruovare, alla destra del doppio della cifra precedente, poi scriverla al di sotto come fattore ed eseguire la moltiplicazione — Sottratto $107.7=749$ da 817 si ha il residuo 68.

— 4.° Due volte il prodotto delle centinaja e decine per le unità — Questo avrà un zero alla destra, e per ciò sarà contenuto nel 687. Doppio delle centinaja e decine già ottenute è il numero 114; quindi la cifra delle unità sarà data da 687:114. Il quoziente 6 sperimentato, come sopra si è detto, si trova esatto; in conseguenza la radice richiesta è 576.

Cerchiamo ancora la radice di 4239481. Questo numero ha 7 cifre; quindi appartiene alla formola $2n-1$. Aumentando 7 di 1, avremo $8=2n$, $n=\frac{8}{2}=4$.

```
|4239481 | 2059
|4       |---------------
|------- |  405 |  4109
|  2394  |    5 |     9
|  2025  |----- |------
| ------ | 2025 | 36981
|  36981 |      |
```

Dunque la radice conterrà migliaja, centinaja, decine ed unità — La 2ª. potenza delle migliaja essendo seguita da 6 zeri, sarà contenuta nella prima cifra a sinistra. La radice 2ª. di 4 è 2: ecco la cifra delle migliaja. Fattone il quadrato e sottratto, si ha zero per residuo. Il doppio prodotto delle migliaja per le centinaja dovrebbe essere contenuto nella seguente cifra 2; ma 2 non è divisibile per 4; mancano dunque le centinaja, e ne faremo occupare il posto da un zero. Quindi saranno nulli il doppio prodotto delle migliaja per le centinaja ed il quadrato di queste. Passeremo a cercare il doppio prodotto delle migliaja e centinaja per le decine, che avendo 3 zeri, comprenderà anche la cifra 9 del numero dato. Il resto dell'operazione sarà eseguito come nell'esempio precedente; ed avremo l'esatta radice 2059.

Se l'operazione non dasse per residuo zero, il numero proposto non sarebbe potenza esatta; così estraendo la radice da 4528, si ottiene 67, ed il residuo 39.

```
|4528 | 67
|36   |----
|---- | 127
| 928 |   7
| 889 |----
|---- | 889
|  39 |
```

85. Veniamo alle frazioni. Sia $\frac{9}{25}$ la frazione di cui si cerca la radice 2ª. La 2ª potenza di una frazione si compone (n.° 83) elevando a 2ª. potenza i due termini: quindi la sua radice si otterrà estraendola dal numeratore e denominatore; ed avremo

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}.$$

Se il numeratore non fosse potenza esatta, la radice sarebbe per approssimazione. La radice, per esempio, di $\frac{10}{49}$ è $\frac{3}{7}$ con l'errore minere di $\frac{1}{7}$, poichè il numeratore $3^2 < 10$, e $4^2 > 10$.

Nel caso che il denominatore della frazione data non fosse quadrato esatto, si terrà il metodo seguente. Sia $\frac{5}{13}$ la frazione proposta; moltiplicandone i termini pel denominatore 13, ciò che non altera il valore, avremo $\sqrt{\frac{5}{13}}=\sqrt{\frac{5.13}{13^2}}=\frac{\sqrt{65}}{13}=\frac{8}{13}$, con un errore minore di $\frac{1}{13}$. Questo limite di errore non si sarebbe ottenuto senza rendere il denominatore quadrato esatto.

Sia 0, 89756 la frazione decimale, di cui si cerca la radice 2ª. Siccome una frazione decimale elevata a 2ª potenza ha sempre (n.° 83) una quatità pari di cifre, così aggiungeremo un zero alla destra (n.° 61) del numero dato. La radice avrà dunque 3 cifre, decimi, centesimi, e millesimi. Il quadrato dei decimi viene in ordine di centesimi; dunque sarà contenuto in 89, che dà 9 per radice 2ª. Sottratto $9^2 = 81$ da 89, si ottiene il residuo 8. — Il doppio prodotto dei decimi pei centesimi è del-

0, 897560	0, 947	
81	184	1887
875	4	7
736	736	13209
13960		
13209		
751		

l'ordine dei millesimi. Si scriverà dunque la cifra 7 a destra di 8; e 87 diviso pe 18 doppio dei decimi, dà il quoziente 4, che riesce esatto. Si sottrae 736 da 875; ed al residuo 139 si aggiunge la cifra 6, perchè decimi e centesimi per millesimi comprendono cinque cifre decimali. Si divida 1396 per 188=94.2, e si avrà la cifra 7 dei millesimi.

Estrazione della radice 3.ª

86. Sia 14348907 il numero, da cui si vuole estrarre la radice 3.ª — Questo avendo 8 cifre, sarà compreso nella formola (n°81) $3n-1$; quindi aggiungiamo 1 a 8, ed abbiamo $9 = 3n$, $n = \frac{9}{3} = 3$. La radice avrà dunque 3 cifre, ossia centinaja decine ed unità, che cercheremo determinare osservando il modo con cui esse hanno composto il numero dato. Ora un numero formato di centinaja decine ed unità, elevato a 3.ª potenza, contiene

14348907	243	
8	12	1728
6348	24	216
5824	16	9
524907	1456	174969
	4	3
	5824	524907

1.° Terza potenza delle centinaja; la quale avendo sei zeri alla destra, sarà contenuta nel 14. Il maggior cubo contenuto in 14 è 8, di cui 2 è la radice; ed ecco determinata la cifra delle centinaja.

2.° Triplo del quadrato delle centinaja moltiplicato per le decine. Il quadrato delle centinaja ha quattro zeri ed uno ne hanno le decine; dunque questo elemento sarà seguito da cinque zeri, e la cifra 3 ne farà parte. Dividendo 63 per $3.2^2 = 12$, si ha il quoziente 5, che deve soddisfare ai due elementi che seguono.

3.° Triplo delle centinaja moltiplicate per la 2.ª potenza delle decine, più 3.ª potenza di queste — Il triplo delle centinaja moltiplicate per la 2.ª potenza delle decine avrà quattro zeri, e tre ne avrà la 3.ª potenza delle decine; dunque alla composizione di questi due elementi concorreranno le cifre 4 e 8 del numero dato. Donde segue che la cifra 5, ottenuta dalla divisione di 63 per 3.2^2, dovrà soddisfare alla relazione

$$3.20^2.5 + 3.20.5^2 + 5^3 \overline{\leq} 6348.$$

Ora $3.20^2.5+3.20.5^2+5^3=(3.20^2+3.20.5+5^2)\times5$
$=(1200+300+25)\times5=$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 30 \\ \underline{25} \\ 1525 \\ \underline{5} \\ 7625 \end{array}$$

La cifra 5 dunque è troppo grande. Con lo stesso metodo si è sperimentata la cifra 4 nel quadro dell' operazione, ed è riuscita esatta.

4.° Triplo del quadrato delle centinaja e decine moltiplicato per le unità — Questo prodotto avrà due zeri; quindi alle cifre del residuo precedente bisognerà aggiungere il 9; e 5249 diviso per $1728=3.24^2$ dà per quoziente 3, che soddisfa alla relazione

$$3.240^2 \; 3+3.240.3^2+3^3=524\;907.$$

Se alcuna delle divisioni non potesse eseguirsi, si metterà un zero al luogo della cifra che si cerca nella radice; e si passerà a determinare la cifra seguente, calcolando quante cifre bisognerà far discendere dal numero dato, perchè vi si contengano tutti gli elementi di cui fa parte la cifra richiesta.

87. Cerchiamo la radice cubica di una frazione, e sia $\frac{27}{125}$.

Essendo (n.° 83) che la 3.ª potenza di una frazione si ottiene con elevare a 3.ª potenza il numeratore ed il denominatore, avremo dunque

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}.$$

Nell' esempio recato si è ottenuta una radice esatta, perchè i due termini della frazione proposta erano 3.e potenze esatte; ma potrebbe avvenire che lo fosse soltanto il denominatore, ovvero nessuno dei due termini. Nel primo caso si avrà la radice per approssimazione, ed il limite dell' errore sarà noto: così

$$\sqrt[3]{\frac{11}{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

con un errore minore di $\frac{1}{3}$.

Se poi dal denominatore della frazione proposta non si potesse estrarre esattamente la radice 3.ª, allora si moltiplicheranno i due termini di essa pel quadrato del denominatore; quale operazione, mentre non altera il valore della frazione, serve a determinare il limite dell' errore: così

$$\sqrt[3]{\frac{9}{23}}=\sqrt[3]{\frac{9.23^2}{23^3}}=\sqrt[3]{\frac{4761}{23^3}}=\frac{16}{23};$$

e l' errore è minore di $\frac{1}{23}$.

88. Finalmente supponiamo una frazione decimale, e sia 0, 778688. La 3.ª potenza di una frazione decimale dovendo avere una quantità di cifre rappresentata da $3n$, n disegnando le cifre della radice (n.° 83); ne segue che la radice richiesta avrà due cifre, ossia decimi e centesimi. Ora la 3.ª potenza dei decimi essendo dell' ordine dei millesimi, sarà contenuta in 778, la cui radice terza è 9: sottraendo $729=9^3$ da 778, si ottiene il residuo 49. Il triplo prodotto del quadrato dei decimi pei centesimi è dell' ordine dei dieci-millesimi; quindi la cifra 6 bisognerà farla discendere alla destra di 49, e 496 conterrà 3.9^2 moltiplicato pei centesimi. Dividiamo 496 per . . . . . $3.9^2=243$, avremo il quozieute 2, che sarà la cifra dei centesimi perchè soddisfa alla relazione .

0, 778688	0, 92
729	243
49688	54
	4
	24844
	2
	49688

$$3.90^2.2+3.90.2^2+2^3=49688.$$

Numeri incommensurabili o irrazionali.

89. Rappresentiamo con N un numero, di cui non si possa avere la radice 2.ª esattamente in numero intero, come 7, 12, 26, ec.; e supponiamo poterla ottenere esatta mediante un intero più una frazione, che disegneremo con $p+\frac{n}{v}$. Avremo, riducendo $p+\frac{n}{v}$

ad una sola espressione frazionaria $\frac{z}{v}$

$$\sqrt{N}=\frac{z}{v},$$

quindi

$$N=\frac{z^2}{v^2}.$$

Ma se la frazione $\frac{z}{v}$ è ridotta alla più semplice espressione, ciò che può sempre farsi, $\frac{z^2}{v^2}$ non può essere numero intero (n.° 39); in conseguenza la relazione $\sqrt{N}=\frac{z}{v}$, ossia $\sqrt{N}=p+\frac{n}{v}$, è impossibile. Ora qualunque sia l'indice radicale il ragionamento essendo sempre lo stesso, si può dedurre in generale che una radice la quale non ha valore esatto in numero intero, non può averne in intero unito a frazione. Quindi il suo rapporto con l'unità non può definirsi, e per ciò tali numeri hanno ricevuto il nome d' *incommensurabili* o *irrazionali* (*h*).

90. Non potendosi di tali radici avere il giusto valore, se ne cercherà uno per approssimazione in modo che l' errore sia trascurabile; ed a tale oggetto si fisserà anticipatamente un limite, il quale dipenderà dalla grandezza dell' unità di misura. Supponiamo, per esempio, che si voglia $\sqrt{7}$ con l'errore minore di $\frac{1}{30}$. Dato questo limite, il valore di $\sqrt{7}$ sarà un' espressione frazionaria, di cui 30 è il denominatore, ed il numeratore è incognito. Chiamiamolo x, e siccome $\frac{x}{30}$ è un numero che dif-

(h) L' espressione *numero incommensurabile* o *irrazionale* quantunque confermata dall' uso, implica contraddizione, poichè *numero* vuol dire rapporto dipendente da misura, e non può misurarsi ciò che non è definito.

ferisce da $\sqrt{7}$ di una quantità minore di $\frac{1}{30}$, avremo

$$\frac{x}{30}<\sqrt{7}, \quad \text{e} \quad \sqrt{7}<\frac{x+1}{30}.$$

Moltiplicando questi tre valori diseguali per lo stesso numero 30, i prodotti saranno ancora diseguali, e si avrà

$$x<30.\sqrt{7}, \quad \text{e} \quad 30.\sqrt{7}<x+1,$$

ossia

$$x<\sqrt{30^2.7}, \quad \text{e} \quad \sqrt{30^2.7}<x+1 \text{ (1)}.$$

Ora estraendo la radice 2ª. da $30^2.7=6300$, si trova $79<\sqrt{30^2.7}$, poichè dà il residuo 59; mentre 80 sarebbe maggiore di $\sqrt{30^2.7}$, esssendo $80^2=6400$. Dunque 79 soddisfacendo alle condizioni di x, ne sarà il valore, ed avremo con un errore minore di $\frac{1}{30}$

6300	79
49	149
1400	9
1341	1341
59	

$$\sqrt{7}=\frac{79}{30}=2+\frac{19}{30}.$$

Se il limite dell'errore fosse $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, ec, il numero posto sotto al segno radicale sarebbe allora moltiplicato,

---

(1) Poichè elevando a 2ª. potenza $30.\sqrt{7}$, avremo

$(30.\sqrt{7})^2=30.\sqrt{7}\times 30.\sqrt{7}=$(n°.27)$\,30.30.\sqrt{7}.\sqrt{7}=30^2.7$;

quindi estraendone la radice 2ª. si avrà

$$30.\sqrt{7}=\sqrt{30^2.7}$$

seguendo lo stesso ragionamento di sopra, per 10^2, 100^2, 1000^2, ec. Ora $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$; dunque si aggiungeranno alla destra del numero dato 2 zeri per avere l' approssimazione sino ai decimi, 4 zeri per estenderla ai centesimi; ed in generale $2n$ zeri per avere n cifre decimali alla radice 2^a. I due esempî seguenti presentano il quadro delle operazioni per determinare $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ con l' approssimazione di 3 cifre decimali.

2,000000	1,414		
1	24	281	2824
100	4	1	4
96	96	281	11296
400			
281			
11900			
11296			
604			

3,000000	1,732		
1	27	343	3462
200	7	3	2
189	189	1029	6924
1100			
1029			
7100			

(k)

(k) Supponiamo che estraendo da un numero la radice 2^a., si siano già ottenute $n+1$ cifre, mentre la radice richiesta dovrà averne in tutto $2n+1$; le rimanenti n cifre si potranno ottenere mediante una sola divisione. In fatti sia N il numero in quistione, a la parte già nota della radice, ed x la parte incognita; avremo

$$\sqrt{N} = a + x,$$

quindi

$$N = a^2 + 2ax + x^2.$$

Da queste due quantità sottraendo a^2, si ottiene

$$N - a^2 = 2ax + x^2;$$

e dividendo l'una e l' altra per $2a$,

$$\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}.$$

Ora x è supposto avere n cifre, in conseguenza il suo quadrato potrà

91. Analogo è il metodo per ottenere la radice cubica con un dato limite di errore. Supponiamo, per esempio, che si voles-

---

averne al più $2n$; a, che tiene $n+1$ cifre significative le quali pel loro valore di sito debbono essere seguite da n zeri, ne avrà in tutto $2n+1$; quindi $\frac{x^2}{2a}$ è una frazione vera. Ma si cerca x sotto forma di numero intero: dunque l'intero contenuto in $\frac{N-a^2}{2a}$ sarà il valore di x.

Applichiamo quest' espressione generale ad ottenere $\sqrt{2}$ con l'approssimazione di 6 cifre decimali. Di sopra abbiamo ottenuto il valore di $\sqrt{2}$ con 4 cifre, una rappresentante la parte intera del radicale, e le tre altre l'approssimazione decimale: queste quattro cifre rappresentano la parte nota a di $n+1$ cifre, e le altre tre che si cercano, determineranno la parte incognita x di n cifre. Ora il processo dell'operazione ha sottratto da 2 il quadrato di 1, 414; in conseguenza l'ultimo residuo 604 aumentato di 6 zeri, vale a dire 604 000000, rappresenterà $N-a^2$. Quindi per avere $\frac{N-a^2}{2a}$ bisognerà dividere 604000000 per 2. (1414000) = 2828000, ossia 604000 per 2828 (n°. 34); il quoziente 213 sarà il valore di x. Così avremo con l'approssimazione di 6 cifre decimali $\sqrt{2} = 1,414213$.

Questo metodo è specialmente utile nelle approssimazioni, poichè trattandosi di avere una radice con molte cifre decimali, esso agevola il termine dell'operazione, che ne forma la parte laboriosa.

Talune volte però avviene che dividendo il residuo pel doppio del valore già trovato, si ottiene un quoziente che non offre la quantità richiesta di cifre: tal' è per esempio, il numero 15389, la cui radice in numero intero è 124. Volendo inoltre l'approssimazione sino ai centesimi si trova che $(15389,0000 - 124^2)$: 248 dà per quoziente 5. In questo caso la cifra dei decimi sarà zero, 5 indicando i centesimi; come dimostra l'operazione qui appresso eseguita.

```
15389, 0000 | 124, 05
1           | 22  | 244 | 24805
----        | 2   |   4 |     5
 53         | --- | --- | ------
 44         | 44  | 976 | 124025
-----       |
 989        |
 976        |
-----       |
  130000    |
```

se $\sqrt[3]{7}$ con l'errore minore di $\frac{1}{12}$: chiamando x il numeratore incognito dell' espressione frazionaria richiesta, avremo

$$\frac{x}{12} < \sqrt[3]{7}, \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{7} < \frac{x+1}{12};$$

quindi

$$x < 12.\sqrt[3]{7}, \quad \text{e} \quad 12.\sqrt[3]{7} < x+1,$$

ossia

$$x < \sqrt[3]{12^3.7}, \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{12^3.7} < x+1;$$

vale a dire che x è il numero intero contenuto nel valore di $\sqrt[3]{12^3.7}$. Ora $12^3.\ 7 = 1728.\ 7 = 12096$; e la parte intera di $\sqrt[3]{12096}$ è 22; dunque con l' errore minore di $\frac{1}{12}$ si ha

$$\sqrt[3]{7} = \frac{22}{12} = 1 + \frac{10}{12}.$$

92. Se poi di un numero si cercasse la radice 3ª con approssimazione decimale, bisognerebbe moltiplicarlo per 10^3, 100^3, 1000^3, ec. ossia aggiungere alla sua destra tante volte tre zeri, quante cifre decimali si vogliono alla radice.

RAGIONI E PROPORZIONI

Definizioni.

93. Il rapporto o la *ragione* di due grandezze omogenee è il risultato del loro paragone. Questo può farsi o determinando quante volte l' una contiene l' altra, o di quanto l' una eccede l' altra. Nel primo caso si ha la *ragione geometrica o per quoziente;* nel secondo la *ragione aritmetica o per differenza.*

I due termini del rapporto si distinguono coi nomi di *antecedente* e *conseguente:* nella ragione geometrica dicesi *antecedente* il dividendo e *conseguente* il divisore; nella ragione aritmetica l'*antecedente* è la somma, il *conseguente* è la parte nota.

Le due specie di ragioni sono indicate dai segni che rappresentano le operazioni, per le quali esse sono determinate: così il rapporto geometrico di 9 a 5 sarà indicato da $9 : 5$ ovvero $\frac{9}{5}$; ed il rapporto aritmetico di 7 a 4 da $7 - 4$.

94. L'eguaglianza di due rapporti geometrici costituisce una *proporzione:* così essendo 2 il rapporto tanto di $6 : 3$ che di $8 : 4$, avremo la proporzione

$$6 : 3 = 8 : 4,$$

la quale si legge: *sei sta a tre come otto a quattro.*

In una proporzione si dicono *termini estremi* il primo e l'ultimo; e *termini medî* il secondo ed il terzo: nella proporzione precedente 6 e 4 sono i termini estremi, 3 ed 8 sono i medî.

95. Se in una proporzione uno stesso termine è conseguente del primo rapporto ed antecedente del secondo, la proporzione dicesi *continua*; tal' è

$$27 : 9 = 9 : 3.$$

Quando poi vi siano quattro termini differenti, la proporzione si chiama *discreta*, come

$$7 : 3 = 14 : 6$$

Teoremi

96. I. Un rapporto geometrico essendo il quoziente di una divisione, ne segue che i quattro termini componenti una proporzione si possono scrivere sotto forma di due espressioni frazionarie eguali: così la proporzione

$$3 : 5 = 12 : 20$$

può trasformarsi nell' eguaglianza

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}.$$

Ora la riduzione di due espressioni frazionarie allo stesso denominatore non alterandone il valore, avremo

$$\frac{3.\ 20}{5.\ 20}=\frac{5.\ 12}{5.\ 20},$$

ossia

$$3.\ 20 = 5.\ 12;$$

poichè due frazioni eguali che hanno lo stesso denominatore, debbono avere necessariamente eguali i numeratori. Ma 3 e 20 sono i termini estremi della proporzione data, 5 e 12 i medî; dunque in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è eguale a quello dei medî.

Questo teorema essendo intimamente connesso all' essenza della proporzione, cioè all' eguaglianza dei rapporti; ne segue

— 1.° che avendo due prodotti eguali, possiamo dire che i quattro fattori formano una proporzione, in cui i due fattori di un prodotto saranno gli estremi, e i due fattori dell'altro saranno i medî: per esempio, essendo $2.\ 18 = 9.\ 4$, si avrà $2 : 4 = 9 : 18$.

— 2.° che i quattro termini di una proporzione si possono disporre in tutti quei modi che conservano costanti i prodotti degli estremi e dei medî. Questi modi sono otto, come dimostra il quadro seguente, in cui si è preso ad esempio la proporzione $4 : 7 = 8 : 14$.

$4 : 7 = 8 : 14$ $\quad$ $14 : 8 = 7 : 4$
$4 : 8 = 7 : 14$ $\quad$ $14 : 7 = 8 : 4$
$7 : 4 = 14 : 8$ $\quad$ $8 : 14 = 4 : 7$
$7 : 14 = 4 : 8$ $\quad$ $8 : 4 = 14 : 7$

— 3.° Che mancando un termine di una proporzione, si può facilmente determinare. Se uno degli estremi è incognito, allora il prodotto dei medî diviso per l' estremo noto ne darà il valore; mancando uno dei medî, il suo valore sarà dato dal prodotto degli estremi diviso pel medio noto. Così nelle due proporzioni

$$x : 7 = 9 : 21$$

$$4 : y = 12 : 15$$

avremo

$$x=\frac{7 \cdot 9}{21}=\frac{63}{21}=3,\ \text{e}\ y=\frac{4.\ 15}{12}=\frac{60}{12}=5.$$

— 4.° Che in una proporzione continua il prodotto dei termini estremi è eguale alla 2.ª potenza del termine medio: così nella proporzione

$$27 : 9 = 9 : 3$$

abbiamo

$$27 \cdot 3 = 9^2.$$

Quindi se manca il termine medio di una proporzione continua, la radice 2.ª del prodotto degli estremi ne darà il valore. Nella proporzione, per esempio,

$$8 : x = x : 2$$

$$x = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4.$$

II. In una proporzione, e sia

$$9 : 3 = 12 : 4,$$

aggiungendo a ciascun antecedente il suo conseguente, i due rapporti diverranno

$$9 + 3 : 3, \text{ e } 12 + 4 : 4.$$

I rapporti $9 : 3$ e $12 : 4$ sono eguali; aggiungendo all'antecedente il suo conseguente, ognuno di essi si è aumentato di un'unità, quindi saranno ancora eguali, e si avrà

$$9 + 3 : 3 = 12 + 4 : 4;$$

e cambiando di posto i termini medî,

$$9 + 3 : 12 + 4 = 3 : 4.$$

Similmente si dimostra aver luogo la proporzione

$$9 - 3 : 3 = 12 - 4 : 4;$$

donde

$$9 - 3 : 12 - 4 = 3 : 4.$$

Dunque in una proporzione la somma o differenza dei termini del primo rapporto sta alla somma o differenza dei termini del secondo, come il primo conseguente sta al secondo.

III. Potendosi ogni proporzione trasformare nell' eguaglianza di due espressioni frazionarie, è chiaro che i quattro termini di una proporzione si possono elevare ad una stessa potenza, ovvero se ne può estrarre una radice del medesimo indice, senza che cessino di essere proporzionali: per esempio, elevando a 3.ª potenza i termini della proporzione

$$4 : 9 = 16 : 36,$$

avremo

$$4^3 : 9^3 = 16^3 : 36^3;$$

poichè la proporzione $4 : 9 = 16 : 36$ può trasformarsi in $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$; e due quantità eguali innalzate alla stessa potenza, resteranno ancora eguali; quindi

$$\frac{4^3}{9^3} = \frac{16^3}{36^3},$$

ossia

$$4^3 : 9^3 = 16^3 : 36^3.$$

Similmente si dimostra che dai quattro termini di una proporzione si può estrarre la stessa radice, conservando l'eguaglianza dei rapporti: così per la redice 2ª. i termini della proporzione precedente ci danno

$$\sqrt{4} : \sqrt{9} = \sqrt{16} : \sqrt{36}$$

ossia

$$2 : 3 = 4 : 6.$$

IV. Le tre proporzioni $\begin{cases} 3 : 7 = 9 : 21 \\ 2 : 5 = 4 : 10 \\ 4 : 8 = 3 : 6 \end{cases}$

trasformate in eguaglianze di espressioni frazionarie, avremo

$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{4}{8}=\frac{3}{6}.$$

Ora il prodotto $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}$ sarà eguale al prodotto $\frac{9}{21}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{6}$. Ma i prodotti delle frazioni si ottengono moltiplicando i loro termini corrispondenti ; dunque

$$\frac{3\,.\,2\,.\,4}{7\,.\,5\,.\,8}=\frac{9\,.\,4\,.\,3}{21\,.\,10\,.\,6},$$

ossia

$$3\times2\times4 : 7\times5\times8=9\times4\times3 : 21\times10\times6.$$

Donde segue che moltiplicando i termini corrispondenti di più proporzioni, i prodotti saranno ancora proporzionali.

V. Supponiamo la serie di rapporti eguali

$$3 : 6=5 : 10=2 : 4=7 : 14=\text{ec.}$$

Essendo il conseguente un divisore, e la ragione un quoziente, si deduce che in ogni rapporto l'antecedente è eguale al prodotto del conseguente per la ragione; per ciò avremo

$$3=6\,.\,\frac{1}{2},\quad 5=10\,.\,\frac{1}{2},\quad 2=4\,.\,\frac{1}{2},\quad 7=14\,.\,\frac{1}{2},\ \text{ec.}$$

quindi

$$3+5+2+7=6\,.\,\frac{1}{2}+10\,.\,\frac{1}{2}+4\,.\,\frac{1}{2}+14\,.\,\frac{1}{2},$$

ossia

$$3+5+2+7=(6+10+4+14)\,.\,\frac{1}{2};$$

donde

$$\frac{3+5+2+7}{6+10+4+14}=\frac{1}{2};$$

vale a dire che in una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti è a quella de' conseguenti, come un antecedente è al suo conseguente.

Progressioni.

97. Dicesi *progressione* una serie di numeri dedotti successivamente l'uno dall'altro mediante un fattore o una differenza costante: nel primo caso la progressione dicesi *geometrica* o *per quoziente*, nel secondo *aritmetica* o *per differenza:* così i numeri 1, 3, 9, 27, 81, ec. formano una progressione geometrica; e 3, 5, 7, 9, 11, ec. una progressione per differenza. Il fattore 3 della prima, e la differenza 2 della seconda si chiamano *ragione della progressione*.

98. Una progressione geometrica si nota, come segue

$$\div\!\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : \text{ec.};$$

ed una progressione aritmetica

$$\div 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ \text{ec.}$$

99. Una progressione dicesi *crescente*, o *decrescente*, secondochè dal primo all'ultimo i termini crescono o decrescono.

100. Nella progressione aritmetica

$$\div 1.\ 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ \text{ec.}$$

essendo il 2.° termine formato dal 1.° più la ragione, il 3.° dal 2.° più la ragione, ec., potremo scriverla nel seguente modo che fa evidente la sua legge di composizione

$$\div 1\ .\ 1+3\ .\ 1+2\times 3\ .\ 1+3\times 3\ .\ 1+4\times 3.\ \text{ec.},$$

ove si osserva che la ragione è presa una volta nel 2.° termine, due volte nel 3.°, tre volte nel 4.°; e quindi $n-1$ volte nell'n^{esimo} termine. Per ciò chiamando u il termine che occupa l'n^{esimo} posto, a il primo termine della progressione, e d la ragione, avremo

$$u = a + (n-1)\,d.$$

Così il 10.° termine della progressione data di sopra sarà $1+9.3=28$.

Se la progressione fosse decrescente, in vece di aggiungere $(n-1)\,d$ al primo termine a, bisognerebbe sottrarlo. Per esempio, il 12.° termine della progressione

$$\div\ 45.\ 43.\ 41.\ 39.\ 37.\ 35.\ \text{ec},$$

sarà $45 - 11.\,2 = 45 - 22 = 23$.

101. Questa relazione è sufficiente a risolvere il problema di determinare più numeri che scritti tra due numeri dati facciano una progressione aritmetica. Siano 11 e 83 i numeri dati, tra quali si vogliono inserire 5 altri numeri che abbiano la sopraddetta condizione. È noto che 83, occupando il 7° posto, sarà eguale a 11 più la ragione ripetuta 6 volte; dunque togliendo 11 da 83, il residuo 72 diviso per 6 darà la ragione 12. Quindi avremo la progressione

$$\div\ 11\ .\ 23\ .\ 35\ .\ 47\ .\ 59\ .\ 71\ .\ 83.$$

102. Date le due progressioni

$$\div\ 1\ .\quad 1+3\ .\quad 1+2\times3\ .\quad 1+3\times3$$
$$\div\ 1+3\times3\ .\quad 1+2\times3\ .\quad 1+3\ .\quad 1\ ,$$

di cui la seconda ha gli stessi termini della prima, ma situati in ordine inverso; se ne addizioniamo i termini corrispondenti, avremo la somma costante $2+3.\,3=11$. Questo risultato è una conseguenza della legge della progressione, poichè se in un termine qualunque della prima progressione la ragione è presa una volta di più che nel precedente, nel termine corrispondente della seconda sarà presa una volta di meno; quindi l'aumento che prende un termine avanzando verso la destra della prima progressione è compensato dalla diminuzione che similmente riceve il termine corrispondente nell'altra progressione. Da ciò risulta

1.° Che in una progressione aritmetica i termini che distano egualmente dagli estremi danno una somma costante: così nella progressione

$$\div\ 4.\ 9.\ 14.\ 19.\ 24.\ 29.\ 34.\ 39.\ 44.\ 49.\ \text{ec},$$

le somme $4+49$, $9+44$, $14+39$, ec. sono tutte eguali a 53.

2.° Se la somma del primo termine e dell'ultimo si ripeta tante volte, quanti sono i termini di una progressione, si avrà

un valore doppio di quello che rappresenta la somma di tutti i termini: quindi per avere la somma dei termini di una progressione, bisognerà addizionare il primo e l' ultimo, moltiplicare questa somma pel numero dei termini, e dividerne il prodotto per 2. Chiamando a il primo termine, u l' ultimo, n il numero dei termini, ed S la somma, avremo

$$S = \frac{(a+u)\,n}{2}$$

Applicando questa formola a determinare la somma de' primi dieci termini della progressione

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31 . 35 . 39 . \text{ec.}$$

avremo

$$S = \frac{(3+39) . 10}{2} = \frac{42 . 10}{2} = \frac{420}{2} = 210.$$

103. Nella progressione geometrica

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : \text{ec.}$$

abbiamo $6 = 2 . 3$, $18 = 6 . 3 = 2 . 3^2$, $54 = 18 . 3 = 2 . 3^3$, $162 = 54 . 3 = 2 . 3^4$, ec. dunque la ragione 3 si trova elevata a 1.ª potenza nel 2.° termine, a 2ª potenza nel 3°, a 3ª potenza nel 4°; ed in generale alla potenza $n - 1$ nell' n^{esimo} termine. Quindi chiamando a il primo termine di una progressione, q la ragione, u un termine qualunque, ed n il suo posto, avremo

$$u = a . q^{n-1}.$$

L' ottavo termine, per esempio, della progressione precedente sarà $2 . 3^7 = 2 . 2187 = 4374$.

104. Mediante questa relazione si possono trovare, tra due numeri dati, più altri che insieme ai dati facciano una progressione geometrica. Siano 4 e 32 i numeri dati, tra quali si vogliono situare due termini proporzionali. Il numero 32 dovendo essere il 4° termine, sarà eguale a $4 . x^3$, chiamando x la ragione incognita; quindi per ottenere x bisognerà dividere 32 per 4, e dal quoziente 8 estrarre la radice cubica, che sarà 2: così avremo la proporzione

$$\div\div 4 : 8 : 16 : 32.$$

Se l' estrazione di radice, necessaria alla soluzione di questo problema, dasse un numero incommensurabile, i termini della progressione sarebbero determinati per approssimazione.

105. Dalle stesse relazioni $6 = 2.3$, $18 = 6.3$, $54 = 18.3$, ec. si deduce che facendo una somma di tutte le quantità scritte a sinistra del segno $=$, ed un'altra delle quantità situate a destra, sarà

$$6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 3\ (2 + 6 + 18 + 54 + 162).$$

Ore $6 + 18 + 54 + \ldots$ rappresenta la somma dei termini meno il primo; per ciò chiamando a il primo termine ed S la somma, avremo il valore di $6 + 18 + 54 + \ldots$ indicato in generale da $S - a$. La somma poi scritta in mezzo alle parentesi contiene tutti i termini meno l'ultimo; dunque chiamando u l'ultimo termine della progressione, e q la ragione, $q\ (S - u)$ sarà l'espressione generale di $3\ (2 + 6 + 18 + .)$; donde

$$S - a = q\ (S - u).$$

Il prodotto $q\ (S - u)$ è eguale a $q.S - q.u$. In fatti supponiamo che la differenza $7 - 3$ debba moltiplicarsi per 5; avremo $7 - 3 = 4$, $4.5 = 20$. Lo stesso prodotto si ottiene da $7.5 - 3.5 = 35 - 15 = 20$. Dunque

$$S - a = q.S - q.u.$$

A queste due quantità eguali aggiungendo il prodotto $q.\ u$, si ha

$$S + q.\ u - a = q.\ S.$$

Sottraendo dall'una e dall'altra la quantità S, avremo

$$q.\ u - a = S.\ q - S = S\ (q - 1);$$

quindi

$$S = \frac{q.u - a}{q - 1}.$$

Ma essendo $u = a.q^{n-1}$; sarà $u.\ q = a.\ q^{n-1}.\ q = \ldots$ $a.q^n$; dunque

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Questa formola applicata a determinare la somma dei primi cinque termini della progressione

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \text{ec.}$$

darà

$$S = 3.\frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 3.\frac{32 - 1}{2 - 1} = 3.\frac{31}{1} = 93.$$

LOGARITMI

Definizioni.

104. Alla composizione della potenza di un numero concorrono due valori, la radice e l'esponente, i quali non possono alternare di funzione e conservare nel tempo stesso il valore della potenza: così $3^5 = 243$, e $5^3 = 125$. Dunque non essendo indifferente il posto di radice o di esponente, la decomposizione della potenza darà origine a due distinti problemi: uno di essi, cioè data la potenza ed il suo grado determinare la radice, è risoluto mediante la legge di composizione della potenza; l'altro che cerca l'esponente di una potenza, quando sono dati i valori della potenza e della radice, conduce alla teorica dei logaritmi.

105. Dicesi *logaritmo* l'esponente che bisogna dare ad un numero costante, che riceve il nome di *base*, a fine di eguagliare un altro numero dato. Sia 5 la base; essendo 2, 3, ec. gli esponenti da darsi a 5, perchè divenga eguale a 25, 125, ec. diremo 2 *logaritmo* di 25, 3 *logaritmo di* 125, e per brevità *log.* 25, *log.* 125.

106. La serie degli esponenti che bisogna dare ad una base determinata, perchè essa rappresenti la serie naturale dei numeri, dicesi *sistema* di *logaritmi*. Tutti i numeri potrebbero scegliersi a base di un sistema logaritmico, eccetto l'unità e le frazioni; la prima perchè elevata a qualunque potenza, dà sempre lo stesso valore, e le seconde, perché decrescono come aumenta il grado della potenza. Il sistema sulla base 10 è suscettibile di più estesa applicazione, e perciò è chiamato *sistema volgare*, o *sistema di Briggs* dal nome del suo inventore.

Teoremi comuni a qualunque sistema logaritmico.

107. I. *In qualsivoglia sistema* 1 *è il logaritmo della base.* Perchè 1 è l'esponente che deve darsi ad un numero qualunque per essere eguale a se stesso.

II. *Il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori.* Per dimostrare questo teorema è d'uopo osservare che se diverse potenze dello stesso numero, come 4^2 e 4^3, si moltiplicano tra loro, il prodotto avrà un esponente eguale alla somma degli esponenti dei fattori; così $4^3 . 4^2 = 4^5$. In fatti essendo $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, e $4^2 = 4 \cdot 4$, avremo

$$4^3 . 4^2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5.$$

Ciò posto, sia a la base di un sistema qualunque di logaritmi, y e y' due numeri, x ed x' i loro logaritmi, avremo

$$a^x = y,$$

$$a^{x'} = y'.$$

Moltiplicando i termini corrispondenti di queste due eguaglianze, sarà

$$a^x . a^{x'} = y . y'$$

ossia

$$a^{x + x'} = y . y';$$

vale a dire che bisogna elevare la base a alla potenza $x + x'$, perchè divenga eguale al prodotto $y.y'$; dunque $x + x'$ sarà il logaritmo del prodotto $y.y'$.

III. *Il logaritmo di una potenza è eguale al logaritmo della radice moltiplicato per l'esponente della potenza.* Sia x il logaritmo di y con la base a; sarà

$$a^x = y.$$

Elevando queste due quantità eguali ad una potenza qualunque, e sia per esempio la 3.ª potenza, avremo

$$a^x . a^x . a^x = y^3,$$

ossia

$$a^{x+x+x}=y^3,\ o\ a^{3x}=y^3.$$

Essendo $3x$ l' esponente che conviene ad a per essere eguale a y^3, sarà $3x=log.y^3$. Ma $x=log.y$, e 3 è l' esponente dato ad y, radice di y^3; dunque il logaritmo di una potenza è eguale al prodotto del logaritmo della radice per l'esponente della potenza.

IV. *Il logaritmo di un quoziente è eguale al logaritmo del dividendo meno quello del divisore.* Essendo, per esempio, $7^5=7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$ e $7^3=7\cdot7\cdot7$, sarà (n° 39) $7^5:7^3=7^2$; dunque dividendo due potenze di uno stesso numero, il quoziente sarà eguale alla radice comune elevata ad una potenza indicata dall' esponente del dividendo meno quello del divisore. In conseguenza essendo x ed x' i logaritmi di y e y', ed a la base; la divisione di $a^x=y$ per $a^{x'}=y'$ ci darà

$$a^{x-x'}=\frac{y}{y'},$$

ossia che $x-x'$ è il logaritmo del quoziente $\frac{y}{y'}$.

Se y fosse minore di y', sarebbe impossibile sottrarre $log.\ y'$ da $log.\ y$; come se da 5 si volesse sottrarre 7. In questo caso si esegue la sottrazione in ordine inverso, cioè da 7 si toglie 5, ed il residuo 2 si fa precedere dal segno —, perchè esso indica quante unità mancano alla somma, per poterne sottrarre la parte data; e si avrà $5-7=-2$. Questi numeri si dicono *negativi*. Ora essendo nelle frazioni vere il numeratore minore del denominatore, i logaritmi delle frazioni saranno negativi; e la loro espressione aumenterà, come la frazione sarà minore, poichè tanto più piccolo sarà il numeratore rispetto al denominatore. Donde segue che essendo lo zero il limite a cui tendono le frazioni decrescenti, il logaritmo di zero sarà un numero infinitamente grande preceduto dal segno —, che viene indicato da $-\infty$.

Inoltre essendo costantemente $=1$ il quoziente di due numeri eguali, come $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, ec.; sarà in qualsivoglia sistema $log\ 1=0$, perchè zero è la differenza dei logaritmi di due numeri eguali.

*

V. *Il logaritmo di una radice è eguale al logaritmo della potenza diviso per l' indice della radice.* Sia y il numero, x il logaritmo, ed a la base; quindi la relazione

$$y = a^x .$$

Chiamiamo z il logaritmo della radice n^{esima} di y; sarà (teor. III)

$$nz = x ;$$

quindi

$$z = \frac{x}{n},$$

ossia che z logaritmo di $\sqrt[n]{y}$ è eguale ad x, logaritmo della potenza y, diviso per l' indice n della radice.

VI. *Se più numeri formano una progressione geometrica, i loro logaritmi saranno in progressione aritmetica.* Sia y il primo termine della progressione geometrica, z la ragione, x il logaritmo di y, ed x' il logaritmo di z, avremo

$$\div\!\!\div\; y : yz : yz^2 : yz^3 : yz_4 : \ldots\ldots yz^n$$

e pei teoremi II e III i logaritmi corrispondenti saranno

$$x, x + x', x + 2x', x + 3x', x + 4x', \ldots . x + nx' .$$

Quest' ultima serie evidentemente è una progressione aritmetica, di cui x è il primo termine, ed x' la ragione.

Teoremi proprî al sistema di Briggs.

108. I. *Disegnando* n *la quantità di cifre di un numero intero, il suo logaritmo conterrà* n — 1 *unità.* Delle serie

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, ec.

i logaritmi sono

0, 1, 2, 3, 4, 5, ec.

Quindi i numeri compresi tra 1 e 10, 10 e 100, ec. avranno i loro logaritmi formati da $0 + frazione$, $1 + frazione$, $2 + frazione$, ec. Dunque tra la quantità di cifre di un numero o le unità del suo logaritmo esiste la relazione che il logaritmo avrà tante unità, quante sono le cifre del numero meno una; così per un numero di 9 cifre, la parte intera del logaritmo sarà 8; e viceversa un logaritmo che tenesse 10 unità, dovrebbe corrispondere ad un numero di 11 cifre. Per questa dipendenza si è dato il nome di *caratteristica* alla parte intera di un logaritmo.

II. *I numeri decupli l'uno dell'altro hanno la medesima frazione nei loro logaritmi.* Siano i numeri 568, 56,8, 5,68: indichiamo con $2 + a$ il logaritmo di 568, a disegnando la frazione aggiunta alla caratteristica 2. Sarà $log. 56,8 = log. \frac{568}{10} = log\ 568 - log\ 10 = 2 + a - 1 = 1 + a$; e $log. 5,68 = log. \frac{568}{100} = log\ 568 - log\ 100 = 2 + a - 2 = 0 + a$. Dunque la parte frazionaria del logaritmo di un numero resta costante, quando il numero viene moltiplicato o diviso per 10, 100, 1000, ec.

Uso delle tavole logaritmiche.

109. I logaritmi sovente utili e qualche volta indispensabili nella soluzione dei problemi numerici, sono stati calcolati per una certa estensione della serie naturale dei numeri, e disposti in tavole ad oggetto di averli pronti all'uopo. Appartiene alle teoriche del calcolo superiore il determinare la funzione che liga un numero al suo logaritmo; qui ci limiteremo alla soluzione dei due seguenti problemi.

110. I — *Dato un numero, ritrovare mediante le tavole il suo logaritmo.* Questo problema offre diversi casi che successivamente esamineremo, supponendo che il lettore avesse le tavole di Lalande, le quali si estendono da 1 a 10000.

— 1.° Sia dato un numero intero che non eccede l'estensione delle tavole. In questo caso si cercherà nella colonna segnata N il numero dato, e nella colonna a destra, che ha per titolo *log.* si troverà sulla stessa orizzontale il suo logaritmo.

— 2.° Si avrà il logaritmo di una frazione ordinaria, i termini della quale siano compresi nell'estensione delle tavole, sot-

traendo dal logaritmo del denominatore quello del numeratore, e facendo precedere il residuo dal segno —. Ma siccome questi logaritmi negativi sono incomodi nel calcolo, così si è cercato renderli positivi mediante i *complementi aritmetici*.

Dicesi *complemento* di un numero ciò che ad esso bisogna aggiungere per avere l'unità dell'ordine immediatamente superiore: così i complementi di 7, 52, e 324 saranno 3, 48, e 676; poichè $7+3=10$, $52+48=100$, $324+676=1000$. In conseguenza per ottenere il complemento di un numero, bisognerà sottrarlo dall'unità seguita da tanti zeri quante sono le sue cifre, ossia fare la prima sottrazione da 10, e tutte le altre da 9.

Ciò posto, supponiamo che da $24+9+826$ si dovesse sottrarre $13+15+432$. Cercando i complementi dei numeri dell'ultima somma, avremo $13=100-87$, $15=100-85$, $432=1000-568$; quindi in vece di 13, 15, e 432 si potranno sottrarre $100-87$, $100-85$, $1000-568$. Ora sottraendo soltanto 100 in vece di $100-87$, avremo sottratte 87 unità di più, che bisognerà aggiungere al residuo. Dunque sottrarre un numero da un altro è lo stesso che aggiungere il complemento e sottrarre l'unità immediatamente superiore. Quindi avremo l'operazione qui a lato, in cui alla somma $24+9+826$ si sono aggiunti i complementi dei numeri 13, 15, 432; ed i $\cdot 1$ segnati alla sinistra dei complementi indicano le unità degli ordini corrispondenti, le qnali si debbono togliere dalle rispettive somme parziali. Procedendo di tal manicra trovaremo $399=(24+9+826)-(13+15+432)$. In fatti $24+9+826=859$, $13+15+432=460$, e $859-460=399$.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ 826 \\ \cdot^{1}87 \\ \cdot^{1}85 \\ \cdot^{1}568 \\ \hline 399 \end{array}$$

Ora il logaritmo negativo non vuol dire altro che un numero da mettersi a calcolo per sottrazione; quindi avremo lo stesso risultato, se in vece di sottrarlo ne prenderemo per addizione il suo complemento, togliendo però dalla somma l'unità dell'ordine immediatamente superiore. Supponiamo, per esempio,

di voler calcolare il logaritmo di $35 \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{11}$, avremo

$$\log 35 \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{11} = \log . 35 + \log \frac{7}{8} + \log \frac{3}{11} .$$

I logaritmi di $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{11}$ sono i residui di $log\ 7 - log\ 8$ e $log\ 3 - log\ 11$; in conseguenza negativi. Aggiungengendo 10 alle caratteristiche dei logaritmi di 7 e 3, essi diverranno positivi, e con una sola addizione avremo il logaritmo richiesto, come qui a lato si vede.

$$\begin{array}{rr} log.\ 35 = & 1,54407 \\ log\ 7 - log\ \ 8 = & {}^{-1}9,94201 \\ log\ 3 - log\ 11 = & {}^{-1}9,43573 \\ \hline & 0,92181 \end{array}$$

— 3° Dato un intero unito a frazione, si comporrà in una sola espressione frazionaria, della quale si cercherà il logaritmo, come di ogni altro quoziente: così

$$log\left(9 + \frac{5}{8}\right) = log\ \frac{77}{8} = log\ 77 - log\ 8.$$

— 4° Sia 7, 256 il numero del quale si domanda il logaritmo. Essendo $7,256 = \frac{7256}{1000}$, sarà $log\ 7,256 = log.\ \frac{7256}{1000} = log\ 7256 - log\ 1000 = 3,86070 - 3 = 0,86070$. Dunque si avrà il logaritmo di un decimale riguardandolo come numero intero, e poi togliendo dal logaritmo di questo tante unità, quante sono le cifre decimali.

— 5° Supponiamo finalmente che un numero ecceda l'estensione delle tavole; e sia per esempio 56843. Perchè questo numero sia compreso tra quelli delle tavole, lo divideremo per 10 separandone a destra una cifra con la virgola; ed il numero 5684, 3 sarà compreso tra 5685, e 5684. Supponendo le differenze dei numeri proporzionali a quelle dei corrispondenti logaritmi (ipotesi legittima quando i numeri sono grandi e piccole le differenze), avremo la proporzione:

$$5685 - 5684 : 5684,3 - 5684 = log\ 5685 - log\ 5684 : log\ 5684,3 - log\ 5684,$$

ossia, facendo $log\ 5684,3 - log\ 5684 = x$,

$$1 : 0,3 = 0,00008 : x;$$

quindi $x = 0,00002.$

Dunque bisognerà aggiungere 0, 00002 a 3, 75465 = *log* 5684 per avere il logaritmo di 5684, 3; e poi aumentando di 1 = *log* 10 la sua caratteristica, si avrà *log* 56843 = 4, 75467.

111. II. *Dato un logaritmo trovare mediante le tavole il numero corrispondente* — 1° Supponiamo dato un logaritmo positivo, e sia 3, 75645. Percorrendo la colonna dei logaritmi che hanno la caratteristica 3, si trova che il logaritmo dato è maggiore di 3, 75641 = *log* 5707, e minore di 3, 75648 = *log* 5708; dunque il numero richiesto dev' essere 5707 più una frazione. Chiamiamo x questa frazione: la differenza 5708 — 5707 = 1, *log* 5708 — *log* 5707 = 0, 00007, e *log* dato 3, 75645 — *log* 5707 = 0,00004; quindi la proporzione

$$1 : x = 0,\ 00007 : 0,\ 00004 = 7 : 4;$$

$$\text{donde} \qquad x = \frac{4}{7} = 0,\ 57\ \ldots$$

Dunque limitando il valore del numero richiesto ai centesimi, si ottiene 5707,57.

E' da osservarsi che qualunque sia la caratteristica del numero dato, purchè positiva, si cercherà sempre il logaritmo tra quelli che l' hanno eguale a 3, poichè questi nelle tavole estese a 10000 presentano la minore differenza tra due logaritmi consecutivi: restando poi a correggere nel numero ottenuto l' errore apportato dall' alterazione della caratteristica. Così il logaritmo 1, 83518 cercato tra quelli che hanno 3 per caratteristica, corrisponde al numero 6842; ma come la caratteristira data è 1, il numero avrà decine ed unità, e sarà in conseguenza 68, 42.

— 2° Sia dato un logaritmo negativo, come — 2, 06329. Aggiungendovi 3 unità, avremo 3 — 2, 06329 = 0, 93671, che sarà il logaritmo di un numero 1000 volte maggiore. Indi cercheremo nelle tavole il nnmero corrispondente che sarà 8, 644, il quale poi diviso per 1000 ci darà 0, 008644, che sarà il vero numero richiesto. Da ciò si rileva che per trovare un numero corrispondente ad un logaritmo negativo, bisognerà aggiungervi tante unità quante bastano a trasformarlo in logaritmo positivo. Sotto questa forma si troverà nelle tavole il numero che gli corrisponde, che bisognerà dividere per 10, 100, 1000, ec., secondochè si saranno aggiunte 1, 2, 3, ec. unità.

Utilità dei logaritmi nelle operazioni di calcolo.

112. Prendiamo ad esempio l'espressione $\dfrac{956^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^3 \times \sqrt[4]{428}}{\left(\frac{11}{13}\right)^2 \times 682 \times \sqrt[3]{\frac{5}{29}}}$,

di cui supponiamo voler calcolare il valore.

Pei teoremi esposti n.° 107 abbiamo

$$log \frac{956^2 \times \left(\frac{7}{8}\right)^3 \times \sqrt[4]{428}}{\left(\frac{11}{13}\right)^2 \times 682 \times \sqrt[3]{\frac{5}{29}}} = 2 \, log \, 956 + 3 \, log \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \, log \, 428$$

$$- \left(2 \, log \frac{11}{13} + log \, 682 + \frac{1}{3} \, log \frac{5}{29} \right).$$

$2 \, log \, 956 = 5,96092$	$2 \, log \frac{11}{13} = {}^{-1}9,85490$
$3 \, log \frac{7}{8} = {}^{-1}9,82603$	$log \, 682 = 2,83378$
$\frac{1}{4} log \, 428 = 0,65786$	$\frac{1}{3} \, log \frac{5}{29} = {}^{-1}9,74552$
$6,44481$	$2,43420$

Quindi il logaritmo dell'espressione proposta sarà .... 6, 44481 — 2, 43420 = 4, 01060, a cui corrisponde il numero 10247,1. Ecco come l'uso dei logaritmi ha fatto determinare facilmente un valore che richiesto secondo l'indicazione del calcolo avrebbe condotto a laboriose operazioni.

NUMERI COMPLESSI

113. Diconsi *numeri complessi* quelli che rappresentano il sistema metrico di una nazione.

114. Il bisogno di misurare quantità più o meno grandi ha fatto inventare diverse unità relative alla medesima specie di grandezze: se il palmo è troppo piccolo per misurare la distanza che separa due città, è al contrario troppo grande per misurare la doppiezza di una moneta; quindi il miglio, la canna, il palmo, l' oncia, ec. sono tante unità lineari che vengono adoperate or l' una or l' altra, seguendo sempre il principio di ottenerne il numero intero più piccolo. Ma non basta avere diverse specie di unità; è d' uopo ancora che esse siano tra loro dipendenti, dimodochè dato il numero ottenuto con una di queste unità, il calcolo possa dedurne, senza l' intermedio della misura diretta, quello che si sarebbe ottenuto con un' altra unità della medesima specie. — La cognizione di questa dipendenza costituisce la teorica dei numeri complessi.

115. L'esistenza di un sistema metrico è una condizione essenziale alla vita civile delle nazioni; come d' altronde la sua perfezione indica una civiltà progredita, poichè suppone non sòlo la coltura di molte scienze, ma ciò che rileva maggiormente, il genio di saperle volgere al miglioramento sociale. I caratteri di un sistema metrico perfetto sono.

1.° *Che abbia un* modulo *desunto da un fatto costante dell' Universo.* Nella grande famiglia dell' umanità una generazione eredita dall' altra il capitale delle cognizioni; lo aumenta, se può, delle sue scoverte, per trasmetterlo poi alla generazione seguente. Non piccola parte di questo retaggio sono quelle scienze, che hanno bisogno dell' opera del calcolo; l' Astronomia, la Geodesia, la Fisica, ec. Fate ora che i dati delle misure dirette, fondamenti di queste scienze, si fossero ottenuti con un sistema metrico non legato a verun fatto costante dell'Universo; e vedrete che la storia conserverebbe con poco vantaggio le ricerche dei dotti, se per avventura il modulo del sistema fosse distrutto.

2° *Che l'* unità lineare *sia modulo dell' intero sistema* — L' esistenza di quest' unica base permetterà che si possa dedurre la capacità di un recipiente, quando se ne conoscano le dimensioni e la sua figura sia geometrica; e che mancando quest' ultima condizione, la capacità si possa determinare mediante il peso e

la densità. In somma dati i valori ottenuti con taluni elementi del sistema, il calcolo darà quelli che riguardano gli altri elementi. Tolta questa coordinazione, il calcolo diviene insufficiente, e bisogna venire alle misure dirette, che riescono talvolta impraticabili.

3° *Che abbia la numerazione decimale* — E' superfluo parlare dei vantaggi del sistema decimale; ma quando le abitudini di un popolo ne siano troppo discordanti, l' introduzione di un simile sistema nell' ordine civile è una cosa impossibile. Gran parte del popolo trae giornaliera sussistenza dall' esercizio di arti e mestieri, in cui la celerità delle operazioni e quindi la somma del lucro dipende dalla prontezza dei giudizî abituali. Cercate togliere a costoro le misure con cui si sono educati, essi presenteranno una resistenza pertinace, perchè nè vogliono rifare le loro abitudini, nè volendo lo potrebbero senza inceppare la loro industria.

Per questo motivo il sistema metrico francese non ha potuto divenire di un uso comune a quella nazione, ed è stato solamente ricevuto dai dotti di ogni paese come sistema metrico delle ricerche scientifiche. —

Sistema metrico francese.

116. Base di questo sistema è il *metro* unità lineare eguale alla dieci-millionesima parte del quarto di meridiano terrestre compreso tra l' equatore ed il polo nord. Esso corrisponde a palmi di Napoli 3,78.

L' unità di superficie per le misure agrarie è l' *ara*, quadrato fatto sopra un lato di 10 metri.

L' unità di volume è il *litro*, cubo che ha per lato la decima parte del metro — Vi è ancora lo *stero*, unità di volume per legna, carbone, ec.; ed è un cubo che ha per lato il metro.

L' unità di peso è il *grammo*, eguale al peso di un centimetro cubico di acqua distillata alla temperatura di 4°, 1 centigradri.

I nomi delle unità 10, 100, 1000, 10000 volte più grandi si formano aggiungendo ai nomi già detti le parole greche *deca*, *ecto*, *kilo*, *miria;* così *decametro*, *ectolitro*, *kilogrammo*, *miriametro*, disegnano 10 metri, 100 litri, 1000 grammi, 10000 metri. I loro summoltiplici sono indicati dalle parole *deci*, *centi*, *milli*, *deci-milli*, così *decilitro*, *centigrammo*, *millimetro*.

L' unità di moneta è il *franco*, pezzo di argento del peso 5 grammi a 0,9 di *fino*. Si divide in 100 *centesimi*.

Sistema metrico del Regno delle due Sicilie.

117. L'unità lineare è il *palmo*, eguale alla settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre. Esso si divide in parti decimali — La *canna* è di 10 palmi; il *miglio* di 7000 palmi.

L'unità di superficie è la *canna quadrata*: l'unità di volume la *canna cubica*.

Il *moggio* è l'unità di superficie per le misure agrarie. E' un quadrato che ha per lato 100 palmi; e si divide in parti decimali.

Il *tomolo* è l'unità di capacità per gli aridi. E' un volume di 3 palmi cubici; e si divide in 2 *mezzette*, 4 *quarte*, 24 *misure*.

Il *barile*, misura di capacità per taluni liquidi, è un cilindro a base circolare del diametro di un palmo, e dell'altezza di 3 palmi. Si divide in 60 *caraffe*.

L'unità di peso è il *rotolo*: si divide in parti decimali, e la millesima parte è il *trappeso*. Cento rotoli formano il *cantaro*.

Il rapporto tra l'unità di peso e l'unità di volume è il seguente. Alla temperatura di 16°, 144 centigradi ed all'altezza barometrica di 0,^{m}76 un palmo cubico di acqua distillata pesa 20 rotola e 736 trappesi.

L'unità di peso per gli usi farmaceutici è la *libbra* di 360 trappesi. Essa si divide in 12 *oncie*; l'oncia in 10 *dramme*; la dramma in 3 *scrupoli*; e lo scrupolo in 20 *granelli*:

Problemi sui numeri complessi.

118. **Problema 1°** — *Date le seguenti quantità di libbre e parti di esse, determinarne la somma.*

Lib.	Onc.	Dram.	Scrup.
7	5	8	2
4	8	6	1
6	10	7	1
8	9	5	2
27	10	8	0

La somma degli scrupoli è 6 = 2 dramme; quindi scriveremo *o* sotto la colonna degli scrupoli, e portaremo 2 alla colon-

na delle dramme, le quali dando per somma 28, ossia 2 oncie ed 8 dramme, scriveremo 8 e portaremo 2 alla colonna delle oncie. Queste ci daranno per somma 34, ossia 2 libbre e 10 oncie, le quali ultime saranno scritte al posto conveniente, e le 2 libbre addizionate alle altre daranno la somma 27.

Ragionando allo stesso modo si troveranno le somme nei due problemi seguenti.

Giorni	Ore	m'	m''
13	20	51	37
9	18	43	38
21	12	49	46
15	16	34	12
60	20	59	13

Can.	Pal.	Onc.
9	5	8
6	3	10 (m)
8	7	5
3	6	9
28	7	8

Problema 2° — *Da una lunghezza di 7 canne, 3 palmi, e 5 oncie, tolte 3 canne, 6 palmi, e 9 oncie; si domanda il numero di canne, palmi ed oncie del residuo.*

Can.	Pal.	Onc.
7	3	5
3	6	8
3	4	9

Non potendosi da 5 oncie sottrarne 9, si prenderà un palmo dai 3 che ve ne sono; e come un palmo equivale a 12 oncie, così sottrarremo 9 da 17, ed avremo il resto 8. Similmente 6 palmi non si possono togliere dai 2 che sono rimasti; prenderemo una canna dalle 7, la quale contenendo 8 palmi, toglieremo 6 da 10, ed avremo il residuo 4. In fine sottraendo 3 canne da 6, si hanno le 3 canne del residuo. Nello stesso modo si otterranno i residui nei problemi che seguono.

Lib.	Onc.	Dram.	Scrup.	Gran.
9	7	5	1	12
4	10	8	2	17
4	8	6	1	15

Tom.	Quart.	Mis.
30	2	3
20	3	5
9	2	4

(m) L' esposizione del sistema metrico del Regno delle due Sicilie, fatta alla pag. 76 è presa dal Decreto de' 6 aprile 1840; ma siccome lo stesso Decreto concede che nei contratti tra privati si possono adoprare per altri cinque anni le misure attualmente in uso; così in questi problemi su i numeri complessi mi rapporto alla nota divisione della canna in 8 palmi, del palmo in 12 oncie, ec.

Problema 3° — *Si domanda quante canne, palmi ed oncie si otterranno, ripetendo 7 volte 5 canne, 6 palmi e 9 oncie.*

Can.	Pal.	Onc.
5	6	9
		7
40	7	3

Le 9 oncie ripetute 7 volte danno il prodotto 63 oncie = 5 palmi e 3 oncie: scrivo le 3 oncie, e porto i 5 palmi al prodotto 42 che risulta dalla moltiplicazione di 6 palmi per 7; quindi avremo in tutto 47 palmi = 5 canne e 7 palmi: questi sono scritti sotto ai palmi, ed aggiungendo le 5 canne al prodotto di 5 per 7, avremo la somma di 40 canne — Simili a questo problema sono i due segnenti.

Lib.	Onc.	Dram.	Scrup.
4	9	7	2
			9
43	3	9	0

Gior.	Or.	m′	m″
12	18	43	37
			8
102	15	48	56

Problema 4° — *Si domanda il prezzo di 3 canne, 7 palmi, e 8 oncie a duc. 7, 50 la canna.*

Can.	Pal.	Onc.	
3	7	8	
	7,50		
	22,50	.....prezzo di	3 canne
	3,75	...............di	4 palmi
	1,875	............di	2 palmi
	0,937	............di	1 palmo
	0,468	............di	6 oncie
	0,156	............di	2 oncie

Prezzo richiesto egnale a duc. 29,686

Una canna volendo duc. 7,50, 3 canne avranno il valore 7,50 X 3 = 22,50. I 7 palmi sono stati divisi in parte aliquote della canna, cioè in 4, 2 e 1; pei 4 palmi si è ottenuto il prezzo 3,75 dividendo 7,50 per 2; così ancora $\frac{3,75}{2} = 1,875$,

$\frac{1,875}{2} = 0,937$, $\frac{0,937}{2} = 0,468$, $\frac{0,468}{3} = 0,156$ ci hanno dato successivamente i prezzi di 2 palmi, 1 palmo, 6 oncie e 2 oncie.

Seguendo lo stesso metodo si è ottenuta la soluzione del seguente problema.

Lib. Onc. Dram.
7 9 8
a duc. 3.45

24,15 ......prezzo di 7 libbre
1,725.............di 6 oncie
0,862.............di 3 oncie
0,144.............di 5 dramme,
0,028.............di 1 dramme
0,056.............di 2 dramme

Prezzo richiesto eguale a duc. 26,965

Questi problemi di moltiplicazione dei numeri complessi si possono ancora risolvere riducendo i numeri complessi ad espressioni frazionarie: così 7 libbre, 9 oncie, ed 8 dramme sono eguali a

$7 + \frac{9}{12} + \frac{8}{120}$ essendo l'oncia 12.ª parte e la dramma 120.ª parte della libbra. Moltiplicando i due termini della prima frazione per 10, avremo $\frac{90}{120} + \frac{8}{120} = \frac{98}{120}$; quindi $7 + \frac{9}{12} + \frac{8}{120} = 7 + \frac{98}{120} = \frac{938}{120}$

di libbra. Ora moltiplicando $\frac{938}{120}$ per 3, 45 prezzo di una libbra, si avrà il valore richiesto.

Problema 5° — *Si cerca la 7ª parte di 13 canne, 5 palmi e 9 oncie.*

Can.	Pal.	Onc.		7		
13	5	9		Can.	Pal.	Onc.
6	53	57				
	4	56		1	7	$8\frac{1}{7}$
		1				

Dividendo le 13 canne per 7, abbiamo il quoziente 1 ed il residuo 6. Queste 6 canne ridotte in palmi, ne danno 48, che aggiunti ai 5 palmi del dividendo, e divisa la somma 53 per 7, danno 7 palmi al quoziente col residuo 4. Similmente i 4 palmi saranno tras-

formati in oncie, ed al numero 48 che ne risulta si aggiungeranno le 9 oncie date; quindi ne divideremo la somma 57 per 7, ed avremo il quoziente $8 + \frac{1}{7}$

Problema 6° — *Determinare il numero di volte che 9 canne, 5 palmi, e 10 oncie contengono 2 canne, 6 palmi e 3 oncie.*

9 can. + 5 pal. + 10 onc. = 77 pal. + 10 onc. = 934 oncie

2 can. + 6 pal. + 3 onc. = 22 pal. + 3 onc. = 267 oncie

$$\begin{array}{r|l} 934 & \underline{267} \\ 801 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Resto = 133 onc. = 1 can. 3 pal. 1 onc.

Le 9 canne ridotte in palmi ne danno 72, a cui aggiunti i 5 palmi dati si hanno 77 palmi. Questi poi trasformati in oncie ne danno 924, e più le 10 oncie date, saranno in tutto 934 oncie. Operando similmente sul divisore, si troverà equivalente a 267 oncie. Quindi si cercherà il quoziente di 934 diviso per 267, e si avrà 3 col residuo 133 oncie. Questo residuo diviso per 12, darà il quoziente 11 palmi col resto 1 oncia; e divisi per 8 gli 11 palmi, avremo 1 canna e 3 palmi; perciò 133 oncie equivalgono a 1 canna, 3 palmi, e 1 oncia.

Problema 7° — 8 *canne*, 3 *palmi*, *e* 5 *oncie di panno sono stati pagati duc.* 48, 50: *si domanda il prezzo di una canna.*

La soluzione del 4.° problema ci fa conoscere che il prezzo 48,50 è il prodotto di una moltiplicazione di cui sono fattori il prezzo di una canna e la quantità del panno. Ora essendo dato il prodotto duc. 48,50 ed il fattore 8 canne, 3 palmi e 5 oncie, la divisione farà conoscere l' altro fattore, cioè il prezzo di una canna; quindi divideremo 48,50 per

$$\begin{array}{r|l} 4656,00 & \underline{809} \\ \underline{4045} & 5,755 \\ 6110 & \\ \underline{5663} & \\ 4470 & \\ \underline{4045} & \\ 425 & \end{array}$$

$8 + \frac{3}{8} + \frac{5}{96} = 8 + \frac{41}{96} = \frac{809}{96}$; e dovendosi dividere un intero

per un' espressione frazionaria, moltiplicheremo 48,50 per 96, ed il prodotto 4656,00 diviso per 809 darà il quoziente 5,755 che sarà il prezzo di una canna.

Problema 8.° — *Dato un numero complesso trasformarlo in espressione decimale.*

Sia il numero complesso 13°, 31', 43'' da ridursi in frazione decimale di giorno. Avremo

$$13^{\circ} + 21' + 43'' = \frac{13}{24} + \frac{21}{24.60} + \frac{43}{24.60^2} =$$

$$\frac{13.60^2}{24.60^2} + \frac{21.60}{24.60^2} + \frac{43}{24.60^2} = \frac{46800+1260+43}{86400} = \frac{48103}{86400}.$$

L' ultima espressione frazionaria ridotta in decimale ci dà o, 55675 che sarà il numero richiesto.

Problema 9.° — *Data una frazione decimale di libbra, determinare le oncie, dramme, scrupoli e granelli in essa contenuti.*

Sia $0^{\text{lib.}}$, 8549 la frazione data. Per determinare le oncie moltiplicheremo 0,8549 per 12, poichè rapportandosi la grandezza data ad un' unità 12 volte minore, il numero dovrà essere 12 volte maggiore: quindi l'intero 10 contenuto nel prodotto $10,2588 = 0,8549 \times 12$, esprimerà le oncie. Indi moltiplicheremo 0,2588 per 10, ed avremo 2,588 di cui l' intero 2 rappresenterà le dramme; e continuando l'operazione con lo stesso metodo si avrà

$0^{\text{lib.}}$, 8549 = 10 oncie, 2 dramme, 1 scrupolo, 15 granelli e 0,28 di granello.

Nello stesso modo si avrà $0^{\text{can.}}$, 356 = 2 palmi, 10 oncie e circa 1 minuto.

Problemi di proporzione.

Problema 1.°—*Si domanda l' interesse per un anno sul capitale 3847 ducati, impiegato alla ragione del 7 per °/ₒ.*

Poichè gl' interessi debbono essere nello stesso rapporto dei capitali, avremo che l' interesse richiesto (il quale essendo inco-

6

gnito lo chiamaremo x) avrà coll' interesse 7 la stessa ragione che esiste tra il capitale 3847 ed il capitale 100. Quindi la proporzione.

$$x : 7 = 3847 : 100 ,$$

donde

$$x = \frac{3847 \cdot 7}{100} = \frac{26929}{100} = \text{duc. } 269 , 29.$$

Problema 2.° — *Un capitale, che supponiamo di ducati 6954, ha dato 385 ducati di rendita in un anno : si domanda a qual ragione d' interesse è stato impiegato.*

Chiamando x la ragione incognita, avremo, seguendo gli stessi principî che ci hanno fatto risolvere il problema precedente,

$$x : 385 = 100 : 6954 ;$$

e perciò

$$x = \frac{38500}{6954} = \text{duc. } 5,54 \text{ circa.}$$

Problema 3.° — *Si vuol sapere qual capitale potrebbe dare 528 ducati annui di rendita, essendo impiegato alla ragione del 5 per °/₀*

Paragonando capitale con capitale e rendita con rendita, si ha la proporzione

$$x : 100 = 528 : 5 ;$$

quindi

$$x = \frac{52800}{5} = \text{duc. } 10560$$

Problema 4.° — *Si domanda la rendita che darà il capitale 8430 ducati, impiegato per 7 mesi e mezzo alla ragione annua del* $6 + \frac{3}{4}$ *per °/₀*

Chiamando x la rendita che il capitale darebbe in un anno, si avrebbe la proporzione

$$x : 6 + \frac{3}{4} = 8430 : 100$$

Ora essendo l' anno composto di 12 mesi, avremo che la rendita di 7 mesi e mezzo (che indichiamo con x') sta alla rendita annua x, come $7 + \frac{1}{2}$ a 12; quindi l' altra proporzione

$$x' : x = 7 + \frac{1}{2} : 12.$$

Moltiplicando i termini corrispondenti di queste due proporzioni, avremo (n.° 96 teor. IV)

$$x' : 6 + \frac{3}{4} = 8430 \times \left(7 + \frac{1}{2}\right) : 100 \times 12;$$

donde

$$x' = \frac{\left(6 + \frac{3}{4}\right) \times 8430 \times \left(7 + \frac{1}{2}\right)}{100 \times 12} = \text{duc. } 355\text{ , }64$$

Problema 5.° — *Un capitalista ha prestato* 1800 *ducati per* 4 *mesi, ed ha obbligato il suo debitore a restituirgli* 1900 *ducati: si domanda a qual ragione si è impiegato il capitale* 1800.

Supponendo che il capitale fosse stato impiegato per un anno, avremmo la proporzione $x : 100 = 100 : 1800$, poichè 100 è stata la rendita del capitale.

Ma come diminuisce il tempo, è necessario, per avere la stessa rendita, che aumenti la ragione dell' interesse; in conseguenza chiamando x' la ragione che ha dato il lucro 100 in 4 mesi, avremo la proporzione

$$x' : x = 12 : 4;$$

e moltiplicando i termini corrispondenti di queste due proporzioni, si avrà

$$x' : 100 = 1200 : 7200,$$

e

$$x' = \frac{120000}{7200}; = \text{duc. } 16{,}66\ldots$$

Problema 6.° = *A è creditore di B della somma di* 1000 *ducati; ma deve attendero* 5 *mesi per avere diritto al pagamento. Egli vende il suo credito a* C, *e convengono sull'interesse di* 1 *per* 100 *al mese: si domanda qual somma* C *deve ritenere su i* 1000 *ducati, per essere soddisfatto dell'interesse convenuto.*

Se il credito fosse stato di 105 ducati, è chiaro che C avrebbe dovuto pagarne 100; quindi diremo se 105 si riducono a 100, 1000 a quanto si ridurranno? Donde la proporzione

$$105 : 100 = 1000 : x,$$

$$x = \frac{100000}{105} = 952,38.$$

Dunque C pagherà ducati 952,38, ritenendo per l'interesse duc. 47,62.

Problema 7.° — *Più persone* A, B, C, D *hanno fatto una società, in cui* A *ha messo* 1500 *ducati*, B 1800, C 3000, D 900. *Con questa somma di capitali si è fatta un' operazione commerciale e si sono lucrati* 754 *ducati: si domanda la parte di lucro che spetterà a ciascuna.*

Trovata la somma dei capitali, ch'è 7200, si cercherà la parte che toccarebbe al capitale 100 mediante la seguente proporzione, stabilita dietro il principio che i guadagni debbono essere proporzionali ai capitali impiegati,

$$x : 754 = 100 : 7200,$$

donde

$$x = \frac{75400}{7200} = \frac{754}{72} = \text{duc. } 10,472.$$

Ora per avere la parte di A che chiamaremo y, stabiliremo la proporzione

$$y : 10,472 = 1500 : 100,$$

quindi

$$y = \frac{10,472 \times 1500}{100} = \text{duc. } 157,08.$$

Da questo risultato si rileva che quando è nota la parte spettante al capitale 100, per avere le porzione di ciascun so-

cio, basta moltiplicare il capitale messo da ciascuno pel lucro di 100, e dividerne il prodotto per 100, ossia separare verso la destra due cifre decimali. A questo modo la soluzione del problema in vece di presentare tante proporzioni da Calcolare quanti sono i socî, non offre che altrettante moltiplicazioni. Così avremo la parte di B eguale a $\frac{1800 \times 10,472}{100}$ = duc. 188,496,

quella di C eguale a $\frac{3000 \times 10.472}{100}$ = duc. 314,16,

e finalmente quella di D = $\frac{900 \times 10,472}{100}$ = duc. 94,248.

Se in simile problema si supponessero i capitali impiegati per tempi differenti, allora si ridurrebbero all'eguaglianza di tempo nel seguente modo. Abbia messo, per esempio, A 400 ducati per un mese, B 300 ducati per 4 mesi e C 700 ducati per 3 mesi; è evidente che il lucro di B sarebbe stato lo stesso, supposte le altre cose eguali, se in vece di 300 ducati avesse impiegato un capitale quadruplo in un mese; similmente per C sarebbe bisognato un capitale triplo di 700. Dunque basterà moltiplicare 300 per 4, e 700 per 3; ed i capitali da mettersi a calcolo saranno 400, 1200, 2100.

Problema 8.° — *Con 10 operaî si è cavato un fosso lungo 100 palmi, largo 6, e profondo 5; essi hanno lavorato 8 ore al giorno, e vi hanno impiegato 12 giorni: si domanda in quanto tempo 8 operaî, lavorando 10 ore al giorno compiranno un fosso lungo 120 palmi, largo 5 e profondo 4; osservando però che lavoreranno sopra un terreno più resistente in modo che potranno cavare 2 palmi cubi nello stesso tempo in cui i primi ne cavavano 3.*

Disponiamo i dati del problema in due linee.

Operaî	lung.	larg.	prof.	resistenza del ter.	ore di lav.	gior.
10	100	6	5	2	8	12
8	120	5	4	3	10	x

Se tutte le condizioni del lavoro fossero le stesse pei primi ed i secondi operaî, allora chiamando y il numero di giorni richiesto in questa ipotesi, avremmo la proporzione

$$y : 12 = 10 : 8;$$

poichè meno sono gli operaî, più giorni sono necessarî.

**

Considerando ora che i secondi operaì debbono eseguire un lavoro più lungo, è necessario che il valore di y, qual' è dato dalla proporzione precedente, aumenti nel rapporto di 120: 100, ossia di 6 : 5; quindi rappresentando con y' questo valore aumentato di y, avremo

$$y' : y = 6 : 5.$$

Ma i secondi operaì debbono cavare un fosso menò largo; quindi y' deve diminuire nel rapporto di 5 : 6; per ciò

$$y'' : y' = 5 : 6.$$

Similmente riguardando la diversa profondità dei due lavori, si avrà

$$y''' : y'' = 4 : 5.$$

È varia ancora la resistenza del terreno; e come essa aumenta, è necessario che aumenti il numero dei giorni; donde

$$y^{\text{IV}} : y''' = 3 : 2.$$

Finalmente i secondi operaì lavorando più ore al giorno, il numero dei giorni dovrà essere minore di quello fin' ora calcolato; in conseguenza

$$x : y^{\text{V}} = 8 : 10;$$

poichè x è il numero dei giorni dipendente da tutte le circostanze del problema.

Situando le proporzioni ottenute l' una sotto dell' altra come qui appresso,

$$\begin{aligned} y &: 12 = 10 : 8 \\ y' &: y = 6 : 5 \\ y'' &: y' = 5 : 6 \\ y''' &: y'' = 4 : 5 \\ y^{\text{IV}} &: y''' = 3 : 2 \\ x &: y^{\text{V}} = 8 : 10, \end{aligned}$$

moltiplicandone i termini corrispondenti, e sopprimendo i fattori comuni ai due termini che costituiranno i rapporti dei prodotti, avremo

$$x : 12 = 4 . 3 : 5 . 2 = 12 : 10,$$

$$x = \frac{12.12}{10} = \frac{144}{10} = 14,4.$$

Applicazione dei logaritmi a taluni problemi.

Problema 1° — *A possiede un capitale di* 500 *ducati che impiega sopra una Banca al* 5 *per* 100. *Ogni anno egli aggiunge la rendita al capitale dell' anno precedente e ne forma un nuovo capitale : si domanda ; qual somma possederà A sulla Banca dopo* 10 *anni ?*

Essendo la ragione dell' interesse il 5 per 100, ogni ducato renderà 0,05 ; quindi dopo il primo anno A possederà ducati $500+500\times0,05 = 500\,(1,05) = 525$; al termine del 2.° anno il credito sarà $525 + 525 \times 0,05 = 525\,(1,05)$; ma $525 = 500.\,(1,05)$; dunque $525\,(1,05) = 500\,(1,05)\,(1,05) = 500.(1,05)^2$; dunque dopo 10 anni il capitale sarà $500\,(1,05)^{10}$ Chiamando x questo capitale, avremo

$$x = 500\,(1,05)^{10};$$

e pei teoremi del n.° 107

$$log\ x = log\ 500 + 10\ log\ 1,05.$$

Ora $log\ 500 = 2,69897$, $log\ 1,05 = 0,021189$, e .... $10\ log\ 1,05 = 0,21189$; quindi $log\ x = 2,91086$, a cui corrisponde nelle tavole il numero 814,45 che sarà il valore del capitale dopo 10 anni.

Problema 2° — *Un negoziante vuol togliere dei fondi che ha in commercio una somma tale che impiegata al* 5 *per* 100 *ed aumentata ogni anno della sua rendita, divenga dopo* 14 *anni* 20000 *ducati, che egli destina per patrimonio ad un figlio di fresco nato : egli vuol sapere la somma da impiegarsi.*

Paragonando questo problema al precedente si osserva che che le quantità date e l' incognita formeranno una simile uguaglianza; soltanto la quantità che si cerca dovrà prendere il posto di 500 nell' eguaglianza $x = 500\,(1,05)^{10}$, 20000 prenderà il luogo di x, e 14 quello di 10 ; quindi avremo

$$20000 = x\,(1,05)^{14};$$

e dividendo l' una e l' altra quantità per $(1,05)^{14}$, sarà

$$x = \frac{20000}{(1,05)^{14}},$$

$$\text{e}\quad log\ x = log.\ 20000 - 14\ log.\ 1,05.$$

Il calcolo qui a lato dimostra il valore del *log* x essere eguale a ..... 4,00438, a cui nelle tavole corrisponde il numero 10100, che sarà la somma da impiegarsi.

$$\begin{aligned} \log 20000 &= 4,30103 \\ 14 . \log 1,05 &= 0,29665 \\ \hline & \ 4,00438 \end{aligned}$$

Problema 3° — *Una persona vuol costruire una casina; e secondo il suo piano la spesa sarebbe di circa 6000 ducati. Essa non tiene che 4000 ducati, che potrebbe impiegare al 6 per 100 sopra una Banca. Si vuol sapere dopo quanti anni, aggiungendo sempre la rendita al capitale, i 4000 ducati diverranno 6000.*

Chiamando x il numero degli anni e ragionando come nel primo problema, avremo

$$6000 = 4000\,(1,06)^x\ ;$$

quindi

$$\log 6000 = \log 4000 + x . \log 1,06\ ;$$

e sottraendo *log* 4000 dai due membri dell' eguaglianza, sarà

$$\log 6000 - \log 4000 = x . \log 1,06\ ;$$

in fine dividendo l' una e l' altra quantità per *log* 1,06; avremo

$$x = \frac{\log 6000 - \log 4000}{\log 1,06} = \frac{3,77815 - 3,60206}{0,02531}$$

$$= \frac{0,17609}{0,02531} = 7 \text{ anni circa.}$$

Problema 4.° — *Un operajo riserbando 3 ducati in ogni mese sul provvento del suo lavoro, l' impiega sopra una Cassa di risparmio che gli dà ½ per 100 al mese. Egli ha 20 ani, e nella supposizione che continui ad aumentare di 3 ducati ogni mese il suo fondo di riserva aggiungendovi inoltre gl' interessi dei mesi precedenti, si vuol sapere il capitale ch' egli possederebbe all' età di 60 anni.*

Se 100 ducati danno in un mese ½ ducato=0,50, 1 ducato darà 0,005 di rendita. Ora i primi 3 ducati essendo impiegati per 40 anni ossia 480 mesi, dopo questo tempo saranno divenuti $3\,(1,005)^{480}$; i secondi saranno $3\,(1,005)^{479}$, ec., formando la serie

$$3\,(1,005)^{480},\ 3\,(1,005)^{479}, \ldots\ldots 3\,(1,005)^{2}, \ldots 3(1,005).$$

Questa evidentemente è una progressione geometrica, di cui possiamo considerare 3 (1,005) come il primo termine e (1,005) la ragione. Quindi il capitale che avrà l'operajo dopo 40 anni sarà la somma dei 480 termini di questa progressione. Ora chiamando a il primo termine di una simile progressione, q la ragione, n il numero dei termini ed s la somma abbiamo ottenuta n.° 105 la relazione

$$S = a.\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

nella quale sostituendo i dati del problema e chiamando x la somma incognita, sarà

$$x = \frac{3(1,005)[(1,005)^{480} - 1]}{0,005} = \frac{3015[(1,005)^{480} - 1]}{5}$$

$$= 603\ [(1,005)^{480} - 1].$$

Per determinare il valore di $(1,005)^{480}$, che cercato direttamente obbligarebbe ad eseguire 479 moltiplicazioni, ne prenderemo il logaritmo, il quale sarà $= 480.\ log.\ 1,005 = 1,03971$. A questo logaritmo corrisponde nelle tavole il numero 10,957 che sarà il valore di $(1,005)^{480}$; quindi $(1,005)^{480} - 1 = 9,957$: moltiplicato questo numero per 603, avremo 6004,07 ch' esprimerà il valore del capitale richiesto. Intanto l'operajo non avrà tolto dal provvento delle sue fatiche che 1440 ducati; ciò che manca a compiere la somma di ducati 6272,91, è il beneficio dell' economia.

Problema 5.° — *Un proprietario per migliorare la condizione de' suoi fondi ha bisogno di 10000 ducati. Egli ottiene questa somma da un capitalista, e gli offre in iscomputo del suo debito la rendita di un fondo, la quale è di 1000 ducati annui; l'interesse convenuto è del 7 per °/₀. Si domanda: per quanti anni la rendita sarà devoluta al creditore, affinchè questi sia soddisfatto tanto del capitale che degl' interessi?*

Chiamo x il numero degli anni. In questa durata di tempo potendo il capitalista far valere alla ragione del 7 per °/₀ tanto i 10000 ducati che gl' interessi di questa somma, è chiaro che il suo credito sarà rappresentato da $10000\ (1,07)^x$; e questo nu-

mero di ducati il debitore dovrebbe pagargli dopo x anni. Ma egli paga 1000 ducati al finire del primo anno; ecco 1000 ducati anticipati di $x-1$ anni, durante il quale tempo impiegando i 1000 ducati e la rendita di questi al 7 per %, possederebbe alla fine degli $x-1$ anni $1000\,(1{,}07)^{x-1}$. Ragionando nello stesso modo trovaremo che i valori dei pagamenti consecutivi saranno $1000\,(1{,}07)^{x-2}$, $1000\,(1{,}07)^{x-3}$, ... $1000\,(1{,}07)$, 1000. Dunque essi formeranno una progressione geometrica, di cui consideriamo 1000 come il primo termine, 1,07 la ragione, ed x il numero dei termini; quindi la loro somma sarà

$$1000 . \frac{(1{,}07)^x-1}{1{,}07-1}=\frac{1000\,(1{,}07)^x-1000}{0{,}07}=\frac{100000(1{,}07)^x-100000}{7}$$

Ora, perchè il capitalista sia soddisfatto del suo avere, è necessario che l' ultima espressione ottenuta sia eguale a quella che rappresenta il credito del capitalista, ossia

$$10000(1{,}07)^x=\frac{100000\,(1{,}07)^x-100000}{7}$$

Moltiplicando queste due quantità eguali per 7, e dividendone i prodotti per 10000, avremo

$$7\,(1{,}07)^x=10\,(1{,}07)^x-10;$$

ai due membri di quest' eguaglianza aggiungiamo il numero 10, e dalle somme togliamone $7\,(1{,}07)x$, si avrà

$$10=3\,(1{,}07)^x;$$

quindi

$$log\ 10=log\ 3+x.\ log\ 1{,}07\ ;$$

e sottraendo dall' uno e l' altro membro $log\ 3$, sarà

$$log.\ 10-log.\ 3=x\ log.\ 1{,}07\ ;$$

donde $x=\dfrac{log\ 10-log\ 3}{log\ 1{,}07}=\dfrac{1-0{,}47712}{0{,}02938}=\dfrac{0{,}52288}{0{,}02938}$
$=17$ anni, e 9 mesi circa.

Dunque il capitalista avrà la rendita del fondo per 18 anni, restituendo nell' ultimo anno 250 ducati che sono il quarto di 1000; poichè i 3 mesi che mancano a compiere l' anno 18.° sono il quarto di 12 mesi.

Se in questo problema si fosse supposto l'interesse al 10 per °/₀, il calcolo ci avrebbe condotti al seguente risultato

$$log.\ 10 = x\ log.\ 1{,}10 + log.\ 0\ ,$$

nel quale sostituendo i logaritmi, si ottiene

$$1 = x.\ 0{,}04139 - \infty \text{ (n.° 107. IV) ;}$$

ed aggiungendo l' *infinito* ai due membri dell' eguaglianze, avremo

$$\infty + 1 = x.\ 0{,}04139.$$

da cui

$$x = \frac{\infty + 1}{0{,}04139} = \infty$$

Dunque il capitalista possederebbe sempre la rendita del fondo. In fatti essendo convenuto l' interesse al 10 per °/₀, i 1000 ducati annui sarebbero precisamente la rendita di 10000, e l' escomputo del debito non avrebbe mai luogo.

Fine dell' Aritmetica.

INDICE